

Semei Coronado Ramirez  
Leonardo Gatica Arreola  
(coords.)

# Métodos no lineales en series económicas y/o financieras



EDITORIAL  
UNIVERSITARIA

Universidad  
de Guadalajara

# **Métodos no lineales en series económicas y/o financieras**



**Semei Coronado Ramirez  
Leonardo Gatica Arreola  
(coords.)**

# **Métodos no lineales en series económicas y/o financieras**



**Universidad  
de Guadalajara**



Marco Antonio Cortés Guardado  
**Rectoría General**

Miguel Ángel Navarro Navarro  
**Vicerrectoría Ejecutiva**

José Alfredo Peña Ramos  
**Secretaría General**

Itzcóatl Tonatiuh Bravo Padilla  
**Rectoría del Centro Universitario  
de Ciencias Económico Administrativas**

José Antonio Ibarra Cervantes  
**Corporativo de Empresas Universitarias**

Javier Espinoza de los Monteros Cárdenas  
**Dirección de la Editorial Universitaria**

Primera edición, 2011

**Coordinadores**  
Semei Leopoldo Coronado Ramirez  
Leonardo Adalberto Gatica Arreola

**Textos**

© Claudio Andrés Bonilla Meléndez, Semei Leopoldo Coronado Ramirez, Carlos Jaime Franco Cardona, Leonardo Adalberto Gatica Arreola, Elizabeth Francisca Gutiérrez Caro, Ricardo Hernández Pérez, Francisco López Herrera, Oswaldo Morales Matamoras, Cinthya Ivonne Mota Hernández, Lucio Alberto Pat Fernández, Abigail Rodríguez Nava, Luisa Fernanda Rodríguez Muñoz, Rafael Román Romero Meza, Antonio Ruíz Porras, Jesús Cuauhtémoc Téllez Gaytán, Ana Torres Mata, Juan David Velásquez Henao, Arturo Lorenzo Valdés, Francisco Venegas Martínez

**Coordinación editorial**  
Sayri Karp Mitastein

**Producción**  
Jorge Orendáin Caldera

**Coordinación de diseño**  
Edgardo Flavio López Martínez

**Diseño de portada e interiores**  
Editorial Universitaria

**Formación**  
Lópx. Diseño y Comunicación Visual

**Corrección**  
David Rodríguez Álvarez

Métodos no lineales en series económicas y/o financieras / Semei Coronado Ramirez, Leonardo Gatica Arreola, coords. ; Claudio Andrés Bonilla Meléndez... [et al.] -- 1a ed. -- Guadalajara, Jalisco, México: Editorial Universitaria : Universidad de Guadalajara, 2011.  
216 p. : il. ; 23 cm. -- (Colección monografías de la Academia).

Incluye referencias bibliográficas

ISBN 978 607 450 487 3

1. Matemáticas financieras 2. Econometría 3. Análisis de series de tiempo 4. Pronósticos de los negocios I. Coronado Ramirez, Semei, coord. II. Gatica Arreola, Leonardo, coord. III. Bonilla Meléndez, Claudio IV. Serie 650.015 13 .M59 HF5691 .M59

**Este libro fue sometido a un proceso de dictaminación a doble ciego de acuerdo con las normas establecidas por el Comité Editorial del Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas de la Universidad de Guadalajara**

**D.R. © 2011  
Universidad de Guadalajara**



**Editorial Universitaria**  
José Bonifacio Andrada 2679  
Colonia Lomas de Guevara  
44657 Guadalajara, Jalisco

**01 800 834 54276**  
[www.editorial.udg.mx](http://www.editorial.udg.mx)

ISBN 978 607 450 487 3

Diciembre de 2011

Hecho en México  
*Made in Mexico*

Se prohíbe la reproducción, el registro o la transmisión parcial o total de esta obra por cualquier sistema de recuperación de información, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, existente o por existir, sin el permiso por escrito del titular de los derechos correspondientes.

En la formación de este libro se utilizaron las familias tipográficas Myriad Pro, diseñada por Robert Slimbach y Carol Twombly, y Minion, diseñada por Robert Slimbach.

# Índice

---

## **7 Prólogo**

Rubén Chavarín Rodríguez  
Gerardo Ríos Almodóvar

---

## **10 Introducción**

Semei Coronado Ramirez  
Leonardo Gatica Arreola

---

## **17 Una investigación científica acerca del progreso de métodos de ensamble basados en inteligencia computacional para predicción de series de tiempo económicas y financieras**

---

Luisa Fernanda Rodríguez  
Juan David Velásquez  
Carlos Jaime Franco

---

## **46 Modelación de los rendimientos bursátiles mexicanos mediante los modelos TGARCH y EGARCH: un estudio econométrico para 30 acciones y el Índice de Precios y Cotizaciones**

---

Arturo Lorenzo Valdés  
Antonio Ruíz Porras

---

## **82 Modelado de la volatilidad del mercado mundial de capitales durante la crisis financiera mundial mediante una cadena de Markov**

---

Francisco López Herrera  
Francisco Venegas Martínez

---

**107 La desviación de Allan aplicada al estudio de escalamiento en series de retornos financieros**

---

Ricardo Hernández Pérez

---

**120 Análisis por multirresolución de series de tiempo económico-financieras**

---

Jesús Cuauhtémoc Téllez Gaytán

Lucio Pat Fernández

---

**145 Modelación no lineal de series de tiempo financieras**

---

Oswaldo Morales Matamoros

Cinthya Ivonne Mota Hernández

---

**167 No linealidad de los retornos accionarios en Chile**

---

Claudio Andrés Bonilla

Rafael Romero-Meza

Elizabeth Gutiérrez

---

**185 Un conjunto de pruebas no paramétricas para detectar dependencia no lineal**

---

Semei Coronado Ramirez

Leonardo Gatica Arreola

Ana Torres Mata

---

**201 Procesos estocásticos y simulación Monte Carlo: aplicación para el tipo de cambio**

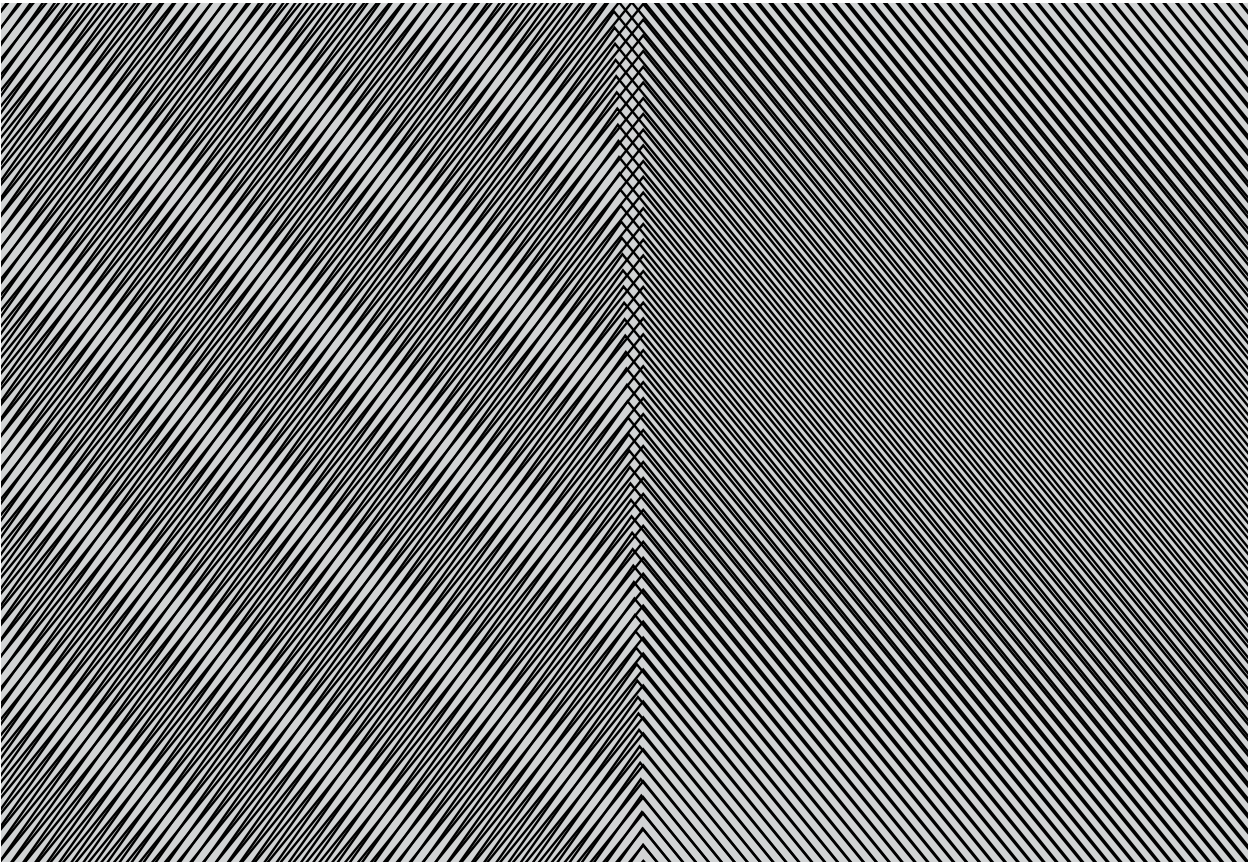
---

Abigail Rodríguez Nava

Francisco Venegas Martínez

Rubén Chavarín Rodríguez  
Gerardo Ríos Almodóvar

## Prólogo



La modelación de las series de tiempo aplicadas a las finanzas y la economía es un campo de estudio joven, pero que ha evolucionado mucho en pocos años. Hasta hace unas pocas décadas, los profesionales de la economía y las finanzas no se interesaban en la estructura interna de las series, sino en intentar medir las relaciones entre variables dentro de los modelos económicos, con la guía de los enfoques teóricos de la economía y las finanzas.

Cuando los economistas y analistas de series financieras tomaron conciencia de que las series de tiempo que empleaban podían tener tendencias subyacentes, supusieron que la información contenida en ellas era estacionaria alrededor de una tendencia determinística. También suponían que los datos se distribuían normalmente y que podían ser modelados en forma lineal.

Sin embargo, en las últimas tres décadas se ha acumulado una evidencia enorme en el sentido de que las tendencias subyacentes a las series contienen información muy relevante, que rara vez es consistente con los supuestos señalados. Por lo tanto, ahora representa un enfoque muy limitado asumir que se tienen series de datos temporales bien comportadas en términos estadísticos.

Si bien en un inicio gran parte de la atención en las series económicas y financieras se enfocó en la determinación de la posible estacionariedad de los datos, recientemente se ha mostrado un gran interés por caracterizar las dinámicas no lineales subyacentes a la información contenida en este tipo de series. Las aplicaciones hechas a los datos financieros tienen la enorme ventaja de poder usar grandes cantidades de información rara vez disponibles para las variables económicas, y esto representa un beneficio analítico que ha permitido probar la robustez de muchos de los modelos desarrollados para el análisis de series temporales.

La continua aparición de técnicas de análisis ha hecho que, por sí mismo, el análisis de series de tiempo pueda ser considerado un campo de estudio independiente, sobre todo por el interés de modelar las series para

generar pronósticos a partir de la información contenida en ellas. Pero los avances en este campo también han contribuido a estimular el desarrollo de nuevos modelos teóricos dinámicos en economía y finanzas, ya que ahora muchos de esos modelos pueden ser sometidos a prueba con el auxilio de las técnicas de series de tiempo.

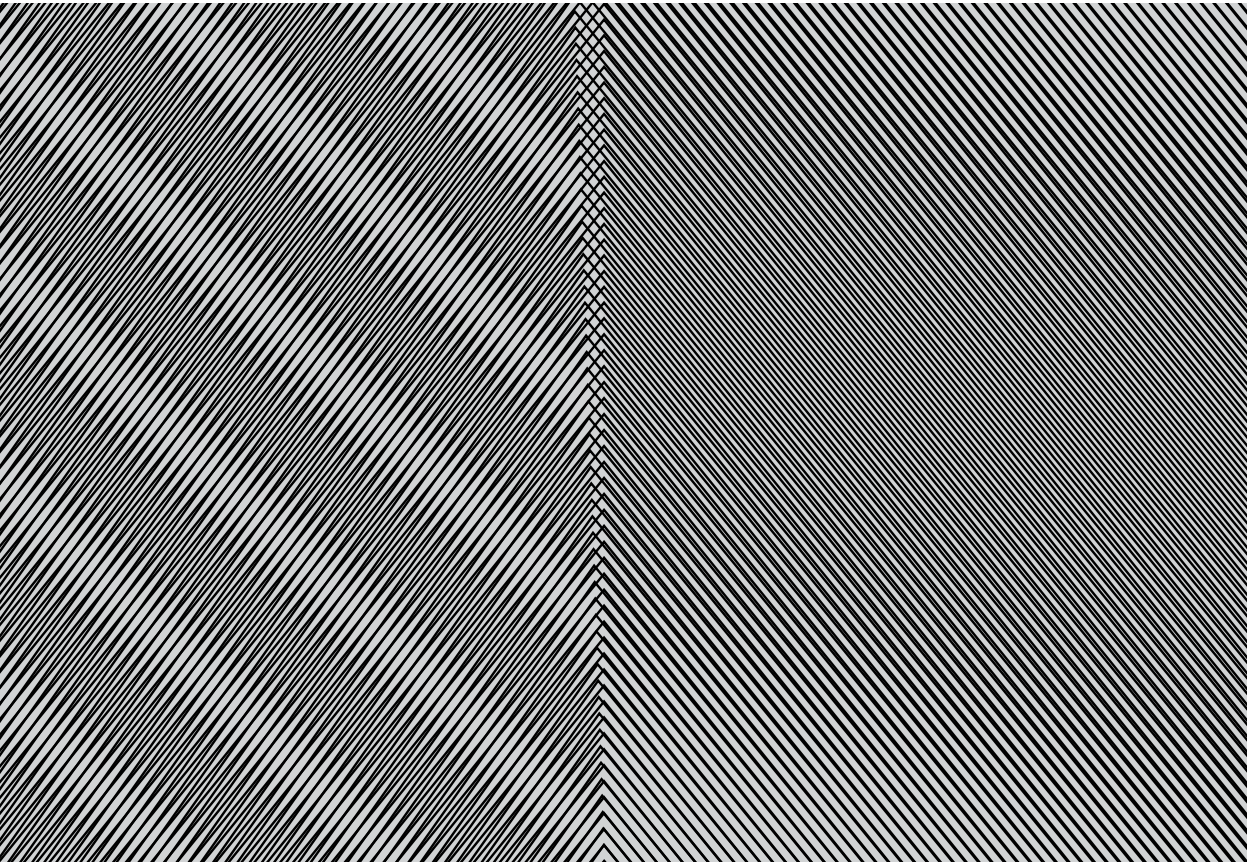
Más allá de que ciertos analistas de las series de tiempo económicas y financieras centren su atención exclusivamente en las propiedades internas de dichas series, su trabajo no escapa a la atención de los economistas y financieros puesto que, en última instancia, muchas de esas series reflejan el modo en el que funcionan los mercados. De esta manera, mientras mejor se conozcan las tendencias subyacentes a las series, mejor será el entendimiento de los fenómenos de la realidad que hacen posible la generación de esos datos.

George E. P. Box, coautor, junto con Gwilym M. Jenkins, de la influyente metodología que detonó este campo de estudio, cuenta que cuando ellos iniciaron su colaboración académica, a fines de los años cincuenta del siglo pasado, siendo muy jóvenes, vivieron años muy felices porque hacían lo que más disfrutaban: interactuar con otros científicos en el desarrollo de ideas y en la solución de problemas reales, basados en datos reales.

Aunque el entendimiento de muchos fenómenos económicos y financieros es aún incipiente, los refinamientos en el análisis de las series de tiempo y su aplicación en datos de América Latina permiten avanzar un paso más en la comprensión de diversos problemas, lo cual es consistente con la experiencia narrada por George E. P. Box. El presente libro muestra diversos ejemplos de las rutas metodológicas y las aplicaciones que actualmente son materia de estudio en este interesante campo.

Semei Coronado Ramirez  
Leonardo Gatica Arreola  
Coordinadores

# Introducción



Uno de los retos más fascinantes en la ciencia es alcanzar la suficiente capacidad de entendimiento de ciertos fenómenos y del comportamiento de las variables que intervienen en éstos, de tal forma que seamos capaces de realizar predicciones sobre dichos fenómenos con cierto grado de asertividad. En el análisis económico, el estudio de las series temporales tiene precisamente ese objetivo; en particular, el estudio de series financieras ha adquirido, en los últimos años, una importancia preponderante.

Hoy en día, la vida de prácticamente cualquier persona es afectada por la complejidad de las relaciones que existen en los mercados, que se reflejan en el comportamiento de los precios de servicios, bienes y activos. El desarrollo que han tenido los mercados financieros y su interacción a nivel global han transformado no sólo las relaciones de los innumerables mercados existentes, sino la forma como las expectativas y la percepción del futuro de ellos afectan la vida cotidiana de las personas. Estas percepciones se forman a partir de las observaciones de las señales que los mercados proveen a través de las series financieras; de ahí la gran importancia de comprender su comportamiento.

Dado el gran desarrollo que en los últimos años han tenido los mercados financieros y el aumento en la complejidad de sus interacciones, el estudio de las series financieras ha atraído la atención de muchos estudiosos, especialmente a partir de la entrega del Premio Nobel de Economía, en 2003, a los profesores Robert Engle y Clive Granger. Esto ha permitido que, durante el mismo periodo, el análisis de series temporales haya tenido grandes avances, y en particular se esté trabajando cada vez más en métodos que permitan transitar del análisis con modelos lineales hacia modelos más complejos de carácter no lineal, ya sean paramétricos o no paramétricos.

Este libro reúne un conjunto de capítulos enfocados en el análisis de series financieras mediante modelos no lineales. Los nueve trabajos que aquí se presentan estudian diferentes tipos de series financieras, ya sea de índices bursátiles y precios de acciones, tipo de cambio o precios de bienes como

el petróleo o el café. No obstante, el objetivo de este libro no es estudiar un conjunto de series financieras en particular y describir sus características. Cada uno de estos trabajos, más que investigar el comportamiento de una serie en particular, busca mostrar metodologías que tratan de capturar comportamientos no lineales que permitan entender mejor el comportamiento de las series financieras y encontrar mejores modelos que puedan caracterizar ese comportamiento. Un número importante de las metodologías que se presentan en este libro son poco conocidas en la literatura económica en castellano. Este libro busca subsanar, al menos en parte, esta carencia, así como darle mayor impulso y difusión al empleo de estos métodos en la literatura en castellano.

Dos de los métodos que buscan mejorar la precisión de las predicciones derivadas de la modelación de series, mediante el uso de diferentes tipos de modelos sobre los que se ajusta una misma serie, son la combinación de pronósticos, por un lado, y por otro, el ensamble mediante el promedio. Estas dos metodologías parten de principios y técnicas comunes y son muy similares. En el primer trabajo que presenta este libro, “Una investigación científica acerca del progreso de métodos de ensamble basados en inteligencia computacional para predicción de series de tiempo económicas y financieras”, se busca establecer el estado actual de la investigación sobre las metodologías de combinación de pronósticos cuando al menos uno de los expertos o modelos de pronóstico, o el método de combinación, son herramientas de inteligencia artificial como redes neuronales artificiales, sistemas difusos o neurodifusos. Para ello se consideraron 73 estudios en los cuales se trata de determinar puntos importantes, como la forma de elección de los expertos y cuáles son los métodos más eficientes en la capacidad de predicción. Tal y como lo señala este trabajo, la mayoría de los análisis están orientados a proponer nuevas metodologías para desarrollar ensambles o combinación de pronósticos, y la diversificación se alcanza usualmente variando un aspecto en los datos o en los expertos; sin embargo, es difícil determinar la superioridad predictiva de un método en particular.

A partir de los trabajos de Engel (1982) y Bollerslev (1986), se han desarrollado una serie de modelos que se desprenden de los ARCH/GARCH, para intentar ajustar algunas características de asimetría o de no linealidad. El segundo capítulo de este libro, “Modelación de los rendimientos bursátiles mexicanos mediante los modelos TGARCH y EGARCH: un estudio economé-

trico para 30 acciones y el Índice de Precios y Cotizaciones”, desarrolla un estudio comparativo usando los modelos no lineales TGARCH y EGARCH para describir el comportamiento de los rendimientos de 30 acciones y del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores. La mayoría de las series muestran efectos apalancamiento y los resultados sugieren que este tipo de modelos ajustan adecuadamente las series estudiadas y muestran que la media de los rendimientos ha disminuido a partir de agosto de 2007, mientras que su varianza ha aumentado.

Otra forma paramétrica empleada en el análisis de la volatilidad de series financieras es mediante modelos de cadenas de Markov. Igual que en el capítulo anterior, el tercer capítulo del libro presenta un estudio de la volatilidad en el mercado bursátil durante la última crisis financiera. En el trabajo “Modelado de la volatilidad del mercado mundial de capitales durante la crisis financiera mundial mediante una cadena de Markov” se analiza la volatilidad del mercado mundial de capitales, antes y durante la crisis financiera que se inició en el mercado hipotecario de Estados Unidos. Para ello, el análisis considera que el proceso estocástico de la volatilidad del mercado de capitales se comporta de acuerdo con una cadena de Markov con dos estados. La aplicación de este método permite caracterizar los periodos en los que la volatilidad del mercado mundial de capitales se encontraba en un régimen de volatilidad alta o, alternativamente, en un régimen de baja volatilidad.

Además de los diferentes métodos paramétricos, como los derivados de los modelos ARCH y GARCH, así como los basados en modelos markovianos, uno de los estudios en los que el análisis de series financieras ha tenido un avance importante es el de las frecuencias de las series. Los trabajos que conforman los capítulos cuarto y quinto de este libro se enmarcan en este tipo de análisis. El cuarto capítulo, “La desviación de Allan aplicada al estudio de escalamiento en series de retornos financieros”, estudia el precio de diferentes activos mediante el escalamiento de sus series de retornos y retornos absolutos mediante la aplicación de la desviación de Allan. Este método se utiliza en el campo de la metrología de tiempo y frecuencia para caracterizar cuantitativamente la estabilidad en la frecuencia de osciladores en diferentes intervalos de observación y permite explorar las propiedades de escalamiento de las series. El análisis reporta evidencia para sostener que las series de retornos siguen una ley de escalamiento y son similares a los

esperados para series sin correlaciones. En el caso de las series de retornos absolutos se observan desviaciones con respecto al escalamiento principalmente en intervalos de observación largos, las cuales pudieran deberse a la presencia de rasgos de no estacionariedad en las series.

El quinto capítulo del libro, “Análisis por multirresolución de series de tiempo económico-financieras”, presenta un análisis del principal indicador bursátil de México, el IPC de la Bolsa Mexicana de Valores, en su frecuencia y escala mediante la aplicación de un método multirresolución a través de *wavelets* u ondoletas. A partir de este análisis se encuentra evidencia de comportamiento asimétrico en la serie. En particular, la evidencia señala que el comportamiento del IPC contiene *gaussianidad-agregativa*, lo cual implica que existe asimetría en la distribución de los rendimientos para diferentes escalas de tiempo. De igual manera, la volatilidad resultó mayor para escalas con menor duración de tiempo, lo que implica mayores pérdidas potenciales en horizontes de inversión de corto plazo respecto a plazos más largos. Esto tiene implicaciones importantes sobre el rechazo de la hipótesis de independencia y distribución idéntica, así como la hipótesis de mercados eficientes (EMH, por sus siglas en inglés) en los mercados financieros.

Esta última implicación es uno de los resultados más importantes que la aplicación de métodos no lineales, y principalmente de los no paramétricos, puede arrojar. Los trabajos presentados en los capítulos sexto, séptimo y octavo aplican diferentes metodologías que ponen a prueba la hipótesis del comportamiento eficiente de los mercados. En el capítulo titulado, “Modelación no lineal de series de tiempo financieras”, se desarrolla y aplica un método para caracterizar y modelar la dinámica no lineal del mercado petrolero, bajo un enfoque de sistemas complejos; concretamente, en el marco conceptual de la teoría de fractales y del crecimiento de interfaces rugosas. Esta metodología trata de capturar el comportamiento no lineal de las series de precios del petróleo crudo West Texas Intermediate (WTI), así como de su volatilidad. Posteriormente, en el capítulo séptimo, se aplican pruebas no paramétricas en varias series del mercado bursátil de Chile. En este trabajo, “No linealidad de los retornos accionarios en Chile”, se aplica la prueba de bicorrelación de Hinich, así como la prueba BDS y la Engle LM, a las tasas de retorno de doce empresas chilenas que cotizan en la Bolsa de Valores de Chile y que pertenecen al Índice General de Precios de Acciones (IGPA), el principal índice de la bolsa chilena. Los resultados de este análisis

muestran evidencia para rechazar el comportamiento de caminata aleatoria de estas series, ya que los retornos accionarios de las empresas estudiadas presentan periodos de dependencia no lineal. En contraste, el capítulo octavo, “Un conjunto de pruebas no paramétricas para detectar dependencia no lineal”, analiza la serie de retornos del café arábica colombiano para mostrar el empleo de cinco pruebas no paramétricas, una vez que la serie se ajustó mediante un modelo EGARCH para aislar las innovaciones de la serie y estudiar su comportamiento. Se escogió el modelo EGARCH entre otros modelos mediante los criterios de Aikake y bayesiano. En este caso los resultados no son concluyentes, por lo que no se rechaza la hipótesis de independencia y distribución idéntica en la serie. Sin embargo, tampoco se puede asegurar que no existan periodos de no linealidad en la serie del café aun cuando inicialmente se ajustó a un modelo EGARCH.

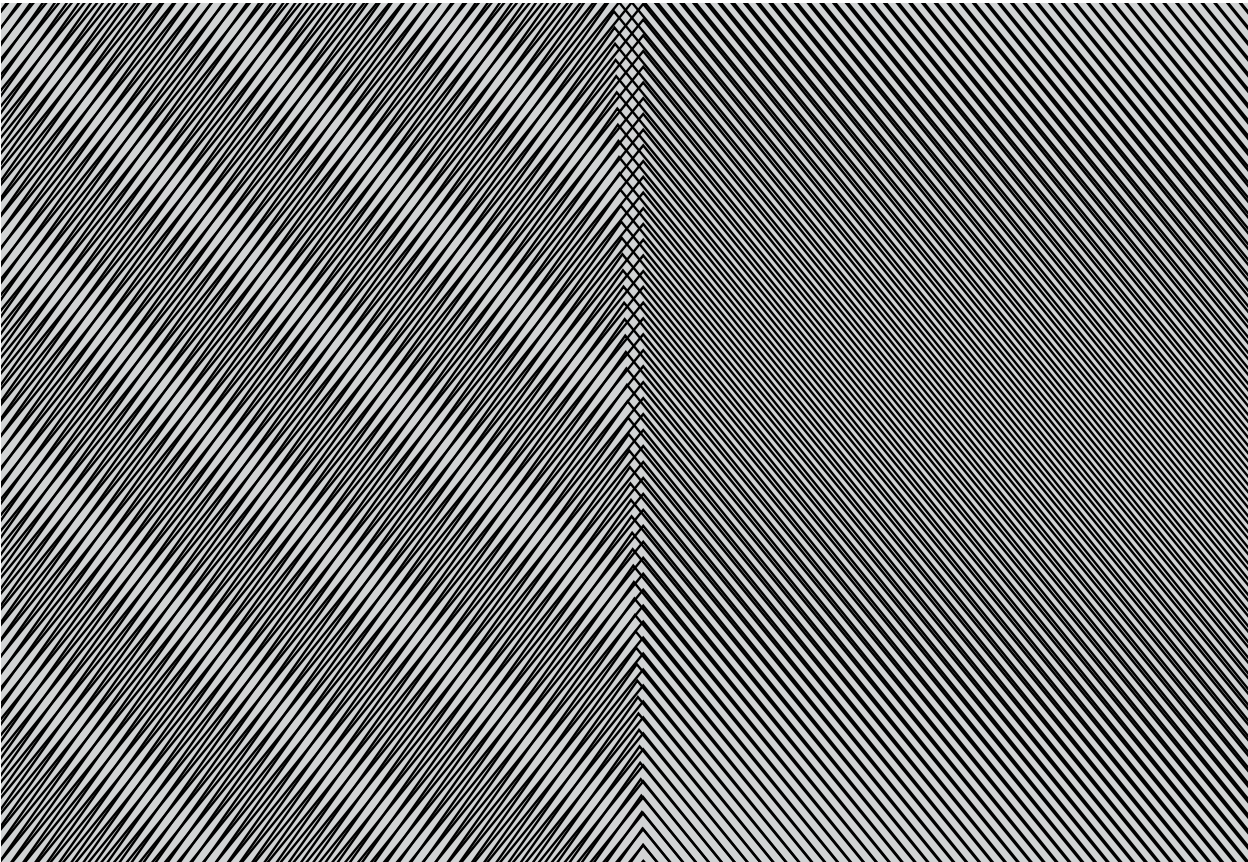
Esta serie de investigaciones cierra con una que muestra la aplicación de métodos de simulación en series de tiempo. Los desarrollos teóricos de modelos estocásticos han sido de suma importancia en el estudio del comportamiento de las series financieras. Muchos de estos modelos se han desarrollado en tiempo continuo, en particular aquellos que incorporan procesos brownianos. Los métodos de simulación pueden ser de gran utilidad para evaluar métodos de transformación de procesos continuos en discretos. El noveno capítulo, titulado “Procesos estocásticos y simulación Monte Carlo: aplicación para el tipo de cambio”, evalúa varios métodos alternativos para transformar los procesos estocásticos convencionales de tipo continuo en sus versiones discretas; estos métodos son los de Euler y Milstein, así como el método exacto. La evaluación del desempeño se hace mediante simulación Monte Carlo. Las propiedades y la eficiencia de cada método se analizan a partir de su aplicación en la simulación de la trayectoria de la variación del tipo de cambio del peso mexicano con respecto al dólar estadounidense. El estudio se enfoca principalmente en el análisis del movimiento geométrico browniano y los procesos con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck.

De esta forma, los nueve capítulos reunidos en este libro buscan dar una visión general del empleo de algunos métodos no lineales, tanto paramétricos como no paramétricos, en el estudio de series de tiempo financieras. Al reunir estos capítulos, intentamos también resaltar la importancia de estos métodos para tener una mayor comprensión del comportamiento de

diferentes variables y fenómenos, más allá de las metodologías tradicionales para el estudio de las series de tiempo. Esperamos que este libro sirva no sólo para la difusión de este tipo de metodologías, sino también para incentivar el trabajo de investigación en esta área entre académicos y estudiantes de habla castellana.

Luisa Fernanda Rodríguez  
Juan David Velásquez  
Carlos Jaime Franco  
Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín

**Una investigación científica acerca  
del progreso de métodos de ensamble  
basados en inteligencia computacional  
para predicción de series de tiempo  
económicas y financieras**



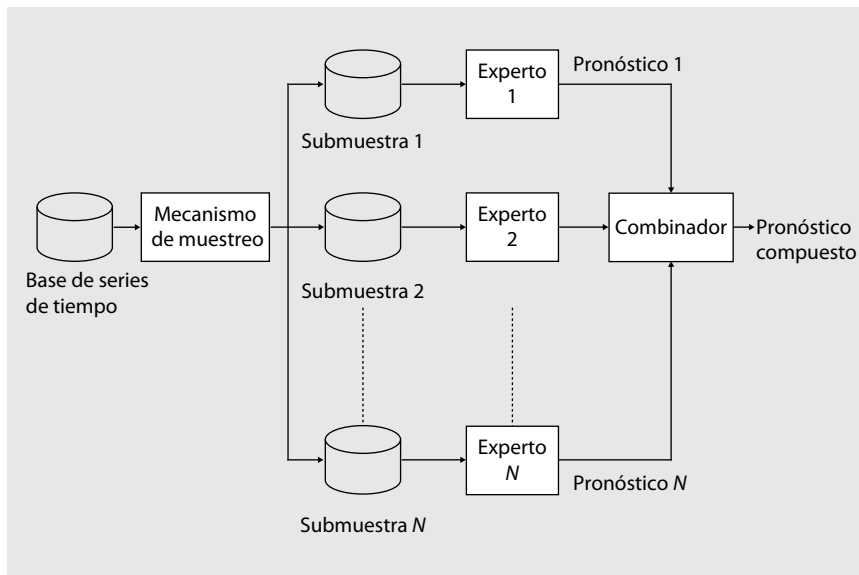
## Introducción

En este estudio se consideran los métodos para obtener pronósticos puntuales combinados para series de tiempo financieras y económicas, como una función de los pronósticos puntuales de  $N$  modelos numéricos diferentes, llamados *expertos* en la jerga de inteligencia computacional. La idea de combinar pronósticos puntuales está profundamente enraizada en las áreas de inteligencia computacional, estadística y econometría. En la figura 1 se presenta el diagrama de un sistema general para la combinación de pronósticos basado en la aproximación de Haykin (1996); el sistema está compuesto de las siguientes partes:

1. Una serie de tiempo que ha de ser pronosticada.
2. Un mecanismo para obtener submuestras de la serie de tiempo original. En los métodos estadísticos las submuestras son, usualmente, idénticas a la serie original.
3. Los expertos o modelos de pronóstico. Existe un experto por cada una de las submuestras obtenidas; cada experto es ajustado a una de las submuestras.
4. Un mecanismo para combinar la predicción puntual obtenida por cada uno de los expertos.
5. El pronóstico compuesto que se obtiene al combinar los pronósticos de los expertos.

En inteligencia computacional, a estos métodos se les llama metodologías de ensamble (Haykin, 1996). En los trabajos originales, los expertos son redes neuronales del tipo perceptrón multicapa, de arquitectura idéntica, pero con diferentes valores asociados a los pesos de las conexiones internas entre las neuronas. La diversificación de los expertos se logra considerando diferentes muestras de entrenamiento para cada experto (Perone, 1993; Breiman, 1996) o diferentes condiciones iniciales para el algoritmo de en-

trenamiento (Naftaly *et al.*, 1997). Los pronósticos compuestos se calculan como el promedio aritmético simple de los pronósticos individuales de cada experto o red neuronal artificial (Perone, 1993) o como una combinación lineal óptima (Breiman, 1996; Hashem y Schmeiser, 1993; Hashem y Schmeiser, 1995; Hashem, 1997) de dichos pronósticos individuales.



**Figura 1.** Diagrama esquemático de un sistema general de combinación de pronósticos.

En los trabajos provenientes de la estadística y la econometría la diversidad se alcanza usando diferentes modelos lineales muy conocidos; así, el problema principal es cómo obtener el pronóstico puntual compuesto. Las primeras contribuciones se enfocaron en la combinación lineal de los pronósticos puntuales (Clemen, 1989; Winkler y Makridakis, 1983; De Menezes *et al.*, 2000; Granger, 1989; Newbold y Granger, 1974) cuando las predicciones individuales se obtienen a partir de diferentes modelos lineales ajustados usando una función de pérdida cuadrática. Las primeras evidencias a favor de la combinación de pronósticos fueron presentadas por Reid (1968) y Barnard (1963), pero Bates y Granger (1969) fueron los primeros en proponer métodos analíticos para calcular el promedio ponderado de los pronósticos individuales.

El uso de los métodos de ensamble y de combinación de pronósticos se justifica por muchas experiencias empíricas que indican que el pronóstico combinado es más preciso que el pronóstico individual para cada experto (véanse las referencias previas). Hay tres razones para aceptar que la combinación de pronósticos es efectiva: primera, cada predicción se puede obtener usando diferentes fuentes de información, cada modelo se basa en un supuesto diferente sobre el tipo de relación entre los datos; segunda, ninguno de los modelos es capaz de indentificar el proceso real de generación de los datos, pero captura información complementaria en relación con otros modelos alternativos (Trui y Van Dijk, 2002), y tercera, hay cambios fuertes en la estructura o en los valores de los parámetros del modelo cuando hay nueva información disponible debido a una pobre especificación del modelo, la presencia de cambios estructurales y no estacionalidades (Timmerman, 2006; Hendry y Clements, 2004).

Si bien no hay duda de la importancia y el gran interés que tiene para investigadores y profesionales la predicción de series usando metodologías de combinación de pronósticos, no existe una visión clara del progreso en este campo. En esta investigación se aplica la metodología de mapeo sistemático, adaptada de disciplinas como medicina, economía y ciencias sociales por Kitchenham (2004), Kitchenham y Charters (2007), Kitchenham *et al.* (2004) y Kitchenham *et al.* (2002). Las intenciones de este trabajo son obtener un panorama sobre la investigación en métodos de combinación de pronósticos para la predicción de series de tiempo económicas y financieras y determinar la cantidad e importancia de los artículos, revisados por pares, que han sido publicados en revistas o trabajos presentados en conferencias. Adicionalmente, se clasificaron, ordenaron y sintetizaron las aproximaciones reportadas en los artículos, con el fin de resumir y entender las variaciones en la metodología e identificar artículos o nuevas áreas para realizar investigaciones posteriores. Hasta donde sabemos, no hay estudios previos que persigan los mismos objetivos de esta investigación.

El interés principal de esta investigación es la intercepción de metodologías de ensamble utilizadas comúnmente en inteligencia computacional y las técnicas estadísticas en la combinación de pronósticos. Así, este trabajo se enfoca en los métodos en que algunos de los expertos del modelo o el método de combinación son técnicas de inteligencia computacional tales como redes neuronales artificiales o modelos de lógica difusa.

El objetivo de este trabajo es responder las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué tan fácil es encontrar documentos relevantes?
2. ¿Qué tanta actividad investigativa ha existido?
3. ¿Cuáles revistas o conferencias publican más artículos?
4. ¿Cuáles son los artículos más citados?
5. ¿Cuáles son los principales modelos de esta aproximación? Para responder esta pregunta de investigación se consideraron las siguientes preguntas:
  - 5.1. ¿Cuáles son los modelos usados como expertos en el sistema?
  - 5.2. ¿Cómo se alcanza la diversificación para los expertos en el ensamble?
  - 5.3. ¿Cuáles son los métodos de combinación usados para tener el pronóstico combinado?
  - 5.4. ¿Cuáles son los tipos de series de tiempo que han sido pronosticados?

Pensamos que este estudio tiene valor para: 1) investigadores del área de inteligencia computacional interesados en la predicción de series de tiempo y en incorporar nuevas metodologías estadísticas en sus estudios; 2) investigadores del área de predicción estadística interesados en aproximaciones novedosas relacionadas con la combinación de pronósticos, y 3) profesionales de las áreas de inteligencia computacional y de estadística interesados en conocer cuáles son los nuevos modelos prometedores para resolver problemas prácticos de predicción.

---

## Metodología

En esta sección se describe el protocolo de investigación, es decir, los pasos metodológicos para la ejecución del presente estudio.

### El estudio de mapeo sistemático

En este estudio se utiliza como método de investigación el mapeo sistemático de literatura (Kitchenham, 2004; Kitchenham *et al.*, 2007; Kitchenham *et*

*al.*, 2004; Kitchenham *et al.*, 2002), con el ánimo de responder las preguntas planteadas. Esta metodología se basa en evidencias, se planea formalmente, es repetible y puede ser ejecutada para responder varias preguntas de investigación diseñadas para dar una visión amplia del área que se investiga e identificar y clasificar los estudios disponibles en el área, para una investigación posterior (Kitchenham *et al.*, 2007). Con el mapeo obtenido es posible detectar vacíos en la investigación actual y sentar las bases para nuevas investigaciones (Kitchenham, 2004; Kitchenham *et al.*, 2007).

Esta investigación analiza estudios primarios y publicados cuyos hallazgos se consideran como hechos. Un mapeo sistemático no es una revisión ordinaria de la literatura, es una metodología para descubrir conocimiento; en ella se recurre al análisis de datos para sintetizar aquellos requeridos para responder las preguntas de investigación (Kitchenham, 2004; Kitchenham *et al.*, 2007; Kitchenham *et al.*, 2004; Kitchenham *et al.*, 2002). Un mapeo sistemático permite al investigador obviar problemas asociados a la revisión de literatura tradicional, informal o narrativa como los siguientes: primero, la falta de una búsqueda sistemática y de métodos de análisis de la evidencia; segundo, el sesgo del investigador hacia hechos positivos; tercero, la ausencia de un proceso de investigación ordenado, reproducible y auditable, y cuarto, las deficiencias en la formulación de preguntas de investigación, e incluso la ausencia de preguntas (Kitchenham, 2004; Kitchenham *et al.*, 2007; Kitchenham *et al.*, 2004; Kitchenham *et al.*, 2002).

## Proceso de búsqueda

Para la ejecución del proceso de búsqueda se usó un sistema de indexación Scopus. La búsqueda tuvo lugar en abril de 2011 y estuvo restringida a las siguientes áreas: ciencias computacionales, inteligencia artificial, bioinformática y matemática. La consulta fue específicamente para recuperar artículos publicados en revistas o memorias de conferencias y congresos hasta marzo de 2011. Los criterios de búsqueda usados fueron: 1) “ensemble” OR (“linear combination” AND “neural network”) AND “time series”; 2) (“forecast combination” OR “forecasts combination” OR “combining forecasts” OR “combination of forecasts” OR “combined forecasts” OR “forecast combining” OR “combine forecasting”) AND “time series”.

## Criterios de inclusión o exclusión

Se realizó una revisión manual del título, el resumen y las palabras clave de los artículos recuperados usando el proceso automático de búsqueda.

Se incluyeron artículos que cumplieron con tres criterios:

1. Se pronostica una serie de tiempo económica, financiera o caótica (*benchmark*).
2. Todos los pronósticos puntuales son obtenidos utilizando modelos matemáticos.
3. Al menos un experto (modelo de predicción) o el mecanismo de combinación (o combinador) es una metodología de inteligencia computacional, ya sean redes neuronales, sistemas de inferencia difusa o sistemas de inferencia neurodifusa.

Se excluyeron artículos que cumplieran alguno de los siguientes criterios:

1. El trabajo está concentrado en regresión no lineal, clasificación de patrones u otros tipos de series de tiempo que no se consideran en los criterios de inclusión.
2. El objetivo del artículo recuperado es la combinación de pronósticos de la probabilidad de un evento (Clements y Harvey, 2011), de intervalos de probabilidad (Hansen, 2006) o de juicios de expertos (Tay y Wallis, 2000; Hall y Mitchell, 2007).
3. La metodología se basa en *boosting* (Shapire, 1990). En una máquina de *boosting*, los expertos son entrenados secuencialmente sobre diferentes distribuciones de datos, donde cada experto se concentra en ejemplos no aprendidos adecuadamente por los expertos anteriores.
4. El modelo usado es una mezcla de expertos (Jacobs *et al.*, 1991; Jacob y Jordan, 1991; Jacob y Jordan, 1994). En este caso, cada experto es ajustado sobre una región definida del espacio de entrada y una red de gatillo (*gating network*) usando información del espacio de entrada, que es usada para determinar la salida del sistema.
5. El artículo se concentra en el problema de encompasamiento (Diebold y López, 1996; Newbold y Harvey, 2002; Clements y Harvey, 2009). En este caso el problema es cómo medir la exactitud de la predicción de cada modelo individual y la comparación entre las predicciones in-

dividuales (que usualmente tienen una exactitud similar), con el fin de determinar cuándo son estadísticamente diferentes y cuándo existe información complementaria.

## Selección de estudio y análisis de datos

De cada artículo seleccionado se extrajeron los siguientes datos: 1) autores; 2) título de la revista o conferencia; 3) año de publicación; 4) citas al artículo; 5) tipos de expertos; 6) metodología para la combinación de pronósticos, y 7) tipos de casos de estudio.

---

## Resultados

Usando las cadenas de búsqueda descritas en la sección anterior, se encontraron más de 1,500 artículos potenciales. Después de realizar una revisión manual aplicando los criterios de inclusión y exclusión definidos, se seleccionaron 40 artículos publicados en revistas y 33 artículos de conferencias. Así, se usaron 73 manuscritos para responder las preguntas de investigación.

---

## Discusión

En esta sección se responden las preguntas de investigación.

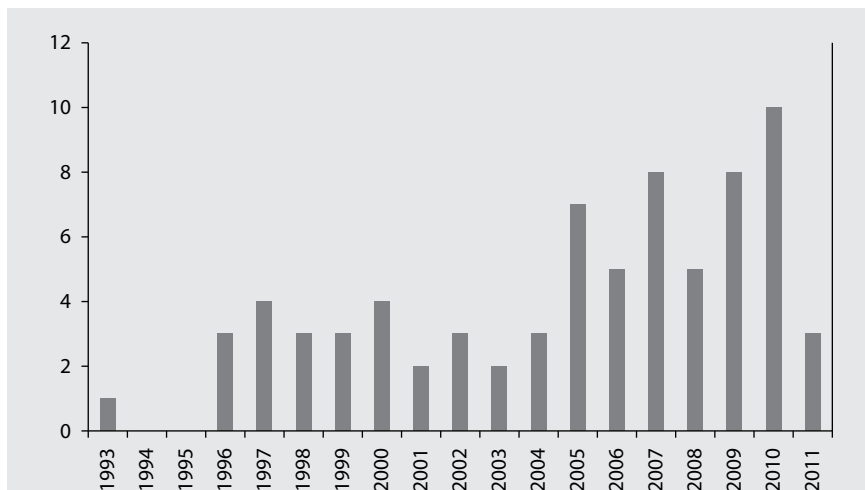
### Respuesta a la pregunta 1: ¿qué tan fácil es encontrar artículos relevantes?

Realmente es difícil responderla. Hay un cuerpo de literatura importante sobre combinación de pronósticos y métodos de ensamble, con más de cuarenta y veinte años de investigación respectivamente. Más aún, el término “combinación de pronósticos” no sólo cubre la predicción puntual de un valor sino también el pronóstico de probabilidades, la combinación de la

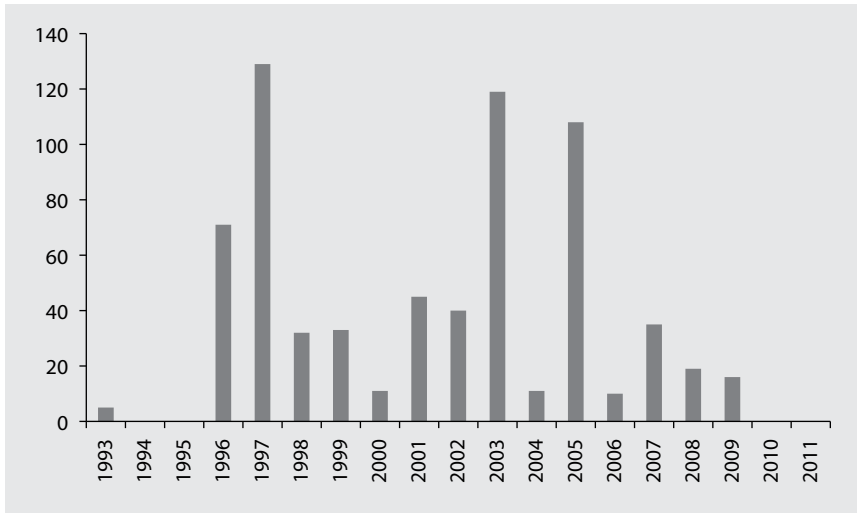
densidad de probabilidad de los pronósticos y la predicción de intervalos. En inteligencia computacional, las metodologías de ensamble no se usan solamente para predicción de series de tiempo sino también en problemas de clasificación y regresión no lineal. En esta investigación sólo el 5% de los artículos recuperados fueron relevantes.

## Respuesta a la pregunta 2: ¿cuánta actividad investigativa se ha realizado?

La motivación para hacer esta pregunta es determinar la importancia actual del tema. La cantidad de estudios publicados por año (gráfica 2a) y la cantidad de citaciones de artículos publicados en un año determinado (gráfica 2b) son medidas de la cantidad y calidad de la investigación. En la gráfica 2a se aprecia que gran parte del trabajo se ha publicado entre 2005 y 2011; en este periodo hay un promedio de siete estudios por año. Con base en la gráfica 2b se concluye que gran parte del trabajo más importante se publicó en 1993, 1997, 2003 y 2005. Se concluye que está en aumento el interés en la investigación sobre métodos de combinación de pronósticos.



**Gráfica 2a.** Actividad investigativa. Número de artículos por año.



**Gráfica 2b.** Actividad investigativa. Número total de citas para el año de publicación del artículo citado.

### Respuesta a la pregunta 3: ¿cuáles revistas o conferencias han publicado más artículos?

En la tabla 1 se listan las revistas y conferencias que han publicado al menos dos artículos. Hay 48 publicaciones con un solo artículo relevante para esta investigación. El *International Journal of Forecasting* publicó tres de los artículos más citados en esta investigación (véase la respuesta a la pregunta 4) con un total de 96 citas; así, esta revista es la más importante en esta área.

Tabla 1. Principales revistas y congresos		
Título	Número de artículos	Referencias
<i>IEEE International Conference on Neural Networks</i>	7	[1][8][13][19][20][21][28]
<i>International Journal of Forecasting</i>	5	[2][7][24][25][27]
<i>Journal of Forecasting</i>	2	[4][6]
<i>Lecture Notes in Computer Science</i>	5	[3][14][16][26][17]
<i>Neurocomputing</i>	3	[15][29][30]
<i>International Joint Conference on Neural Networks</i>	3	[5][10][22]
<i>Studies in Computational Intelligence</i>	2	[18][23]

## Respuesta a la pregunta 4: ¿cuáles son los artículos más citados?

En la tabla 2 se presentan los artículos con más de 20 citaciones: dos de ellos están relacionados con la combinación no lineal de pronósticos (Fiordaliso, 1998; Donaldson y Kamstra, 1996), cuatro describen las metodologías para la construcción de ensambles (Islam *et al.*, 2003; Kim y Kim, 1997; Yu *et al.*, 2005; Zhang, 2007) y cuatro presentan casos de aplicación (Teräsvirta *et al.*, 2005; Terui y Van Dijk, 2002; Zhang y Berardi, 2001; Harrald y Kamstra, 1997).

## Respuesta a la pregunta 5: ¿cuáles son los principales modelos en esta aproximación?

*Respuesta a la pregunta 5.1: ¿cuáles son los modelos usados como expertos en el sistema?* Para responder esta pregunta se consideró que el sistema puede tener expertos del mismo o de diferente tipo. En la literatura sobre predicción, la práctica tradicional es usar diferentes tipos de modelos en el ensamble con el propósito de capturar diversas características de la serie de tiempo. Los modelos más usados son: redes neuronales artificiales, ARIMA, suavizamiento exponencial y regresión polinomial. En inteligencia computacional lo más común es que el mismo tipo de modelo se use para todos los expertos. En este caso el perceptrón multicapa y las máquinas de vectores de soporte son los tipos de modelos usados con mayor frecuencia.

Tabla 2. Artículos más citados				
Autores	Título del artículo ( <i>título de la revista</i> )	Año	Número de citas	Referencias
Islam, M. M., Yao, X., Murase, K.	A constructive algorithm for training cooperative neural network ensembles ( <i>IEEE Transactions on Neural Networks</i> )	2003	119	[11]
Kim, D., Kim, C.	Forecasting time series with genetic fuzzy predictor ensemble ( <i>IEEE Transactions on Fuzzy Systems</i> )	1997	98	[12]
Donaldson, R. G., Kamstra, M.	Forecast combining with neural networks ( <i>Journal of Forecasting</i> )	1996	67	[6]
Yu, L., Wang, S., Lai, K. K.	A novel nonlinear ensemble forecasting model incorporating GLAR and ANN for foreign exchange rates ( <i>Computers y Operations Research</i> )	2005	63	[31]
Terui, N., Van Dijk, H.K.	Combined forecasts from linear and nonlinear time series models ( <i>International Journal of Forecasting</i> )	2002	36	[25]
Terasvirta, T., Van Dijk, D., Medeiros, M.C.	Linear models, smooth transition autoregressions, and neural networks for forecasting macro economic time series: A re-examination ( <i>International Journal of Forecasting</i> )	2005	35	[24]
Zhang, G.P., Berardi, V.L.	Time series forecasting with neural network ensembles: An application for exchange rate prediction ( <i>Journal of the Operational Research Society</i> )	2001	28	[33]
Harrald, P.G., Kamstra, M.	Evolving artificial neural networks to combine financial forecasts ( <i>IEEE Transactions on Evolutionary Computation</i> )	1997	25	[9]
Fiordaliso, A.	A nonlinear forecasts combination method based on Takagi-Sugeno fuzzy systems ( <i>International Journal of Forecasting</i> )	1998	25	[7]
Zhang, G.P.	A neural network ensemble method with jittered training data for time series forecasting ( <i>Information Sciences</i> )	2007	23	[32]

En los sistemas que usan el mismo tipo de modelo se han utilizado las siguientes metodologías como expertos: ANFIS (Chen y Zhang, 2007; Soto *et al.*, 2010), redes asociativas competitivas (Kurogi *et al.*, 2007), máquinas de aprendizaje extremo (Van Heeswijk *et al.*, 2009), modelos difusos de series de tiempo (Aladag *et al.*, 2010; Kim y Kim, 1997), perceptrones multicapa (Chiewchanwattana y Lursinsap, 2002; Islam *et al.*, 2003; Palit y Popovic, 2000; Peng y Zhu, 2009; Peralta *et al.*, 2010; Ruta y Gabrys, 2007; Schwaerzel y Rosen, 1997; Zhang, 2007; Zhang y Berardi, 2001; Lin y Zhu, 2007; Zhao *et al.*, 2008), redes neuronales de función de base radial (Wang y Li, 2010; Yu *et al.*, 2008), redes neuronales autogenerativas (Inoue y Narihisa, 2000; Zengl y Qui, 2003), máquina de vectores de soporte (Cai *et al.*, 2007; Deng *et al.*, 2005; Yang y Ma, 2010; Yang y Shi, 2010).

En el caso de los sistemas que usan diferentes tipos de expertos, las metodologías empleadas son las siguientes: ANFIS (Lemke y Gabrys, 2010; Leone *et al.*, 2006), redes neuronales artificiales (Andrawis *et al.*, 2001; Landassuri y Bullinaria, 2009; Leonel *et al.*, 2006; Rutam *et al.*, 2011; Santana, 2006; Shi *et al.*, 1999; Wichard y Ogozalek, 2004; Wichard y Ogozalek, 2007; Yu *et al.*, 2005), redes neuronales autorregresivas (Teräsvirta *et al.*, 2005), ARIMA (Badri, 1997; Fiordaliso, 1998; Gomes *et al.*, 2006; Palit y Popovic, 2000; Ruta y Gabrys, 2007; Shi y Liu, 1993; Xiao *et al.*, 2009), DAN2 (Gomes *et al.*, 2006), redes de Elman (Lemke y Gabrys, 2010), modelos autorregresivos exponenciales (Terui y Dijik, 2002), GARCH exponenciales (Hu y Tsoukalas, 1999), suavizamiento exponencial (Badri, 1997; Badri *et al.*, 1998; Han *et al.*, 2007; Lemke y Gabrys, 2010; Palit y Popovic, 2000; Ruta y Gabrys, 2007; Santana, 2006; Shi *et al.*, 1999; Shi y Liu, 1993; Xiao *et al.*, 2009), GARCH (Donaldson y Kamstra, 1999; Dong, 2002; Harrald y Kamstra, 1997; Tsangari, 2007; Hu y Tsoukalas, 1999), regresión gaussiana (Andrawis *et al.*, 2011), autorregresión lineal generalizada (Yu *et al.*, 2005), modelos lineales autorregresivos (Prudencio y Ludermir, 2006; Teräsvirta *et al.*, 2005; Terui y Dijik, 2002), modelos de medias móviles (Ruta *et al.*, 2011; Xiao *et al.*, 2009), varianza de medias móviles (Donaldson y Kamstra, 1999; Dong, 2002; Harrald y Kamstra, 1997; Hu y Tsoukalas, 1999), perceptrones multicapa (Sun *et al.*, 2010), regresión lineal múltiple (Andrawis *et al.*, 2011; Fiordaliso, 1998; Han *et al.*, 2007; Leone *et al.*, 2006), modelos del vecino más cercano (Wichard, 2011; Wichard y Ogorzalek, 2004; Wichard y Ogorzalek, 2007), modelos de la trayectoria más cercana (Wichard, 2011;

Wichard y Ogorzalek, 2004; Wichard y Ogorzalek, 2007), redes híbridas combinando redes de base radial y perceptrones (Wichard y Ogorzalek, 2004; Wichard y Ogorzalek, 2007), regresión polinomial (Lemke y Gabrys, 2010; Ruta y Gabrys, 2007; Shi *et al.*, 1999; Shi y Liu, 1993; Wichard y Ogorzalek, 2004; Wichard y Ogorzalek, 2007), redes neuronales de base radial (Lemke y Gabrys, 2010), caminata aleatoria (Prudencio y Ludemir, 2006; Ruta y Gabrys, 2007), redes neuronales recurrentes (Lemke y Gabrys, 2010; Leone *et al.*, 2006; Sun *et al.*, 2010), modelo autorregresivo de transición suave (Teräsvirta *et al.*, 2005), promedio simple móvil (Andrawis *et al.*, 2011), modelos estructurales de series de tiempo (Lemke y Gabrys, 2010; Ruta y Gabrys, 2007), método theta (Lemke y Gabrys, 2010; Ruta y Gabrys, 2007) y modelo autorregresivo con umbral (TAR) (Terui y Dijik, 2002).

*Respuesta a la pregunta 5.2: ¿cómo se logra la diversificación de los expertos en el ensamble?* Se han usado varias estrategias para lograr la diversificación entre los expertos del sistema. La más común es la variación del tipo de expertos, seguida de la variación de los datos utilizados para entrenar (ajustar o calibrar) cada experto; dicha variación de los datos es obtenida al aplicar metodologías como validación cruzada, *bootstrapping* o *bagging*.

A continuación se listan las metodologías que han sido reportadas en la literatura para realizar la diversificación de los expertos:

1. Mediante la variación de los datos: incorporación de ruido a los datos (Ruta *et al.*, 2011; Zhang, 2007), *bagging* (Deng *et al.*, 2005; Kurogi *et al.*, 2007; Wang y Li, 2010; Lin y Zhu, 2007), *boosting* (Wang y Li, 2010), *bootstrapping* (Chen y Zhang, 2005; Deng *et al.*, 2005; Inoue y Narihisa, 2000; Lai *et al.*, 2006), *fuzzy possibility c-means* (Yang y Ma, 2010; Yang y Shi, 2010), validación cruzada (Palit y Popovic, 2000; Peng y Zhu, 2009; Peralta *et al.*, 2010; Ruta y Gabrys, 2007; Ruta *et al.*, Gabrys y Lemke, 2011; Wichard y Ogorzalek, 2004; Wichard y Ogorzalek, 2007; Zhang y Berardi, 2001), muestreo al azar sin reemplazo (Chen y Zhang, 2005), selección de diferentes entradas para el modelo (Ruta *et al.*, 2011; Badri, 1997), *stacking* (Yu *et al.*, 2008), *thick modeling* (Riedel y Gabrys, 2007).
2. Mediante la variación de la función de pérdida o error: función de pérdida lineal (Deng *et al.*, 2005), función de pérdida cuadrada (Deng *et al.*, 2005).
3. Mediante la variación del tipo de expertos (Ahmed *et al.*, 2009; Aladag *et al.*, 2010; Andrawis *et al.*, 2011; Donaldson y Kamstra, 1999; Dong,

- 2002; Fiordaliso, 1998; Gomes *et al.*, 2006; Han *et al.*, 2007; Landassuri y Bullinaria, 2009; Lemke y Gabrys, 2010; Lubeke *et al.*, 1998; Prudencio y Ludermir, 2006; Pulido *et al.*, 2009; Riedel y Gabrys, 2007; Ruta *et al.*, 2011; Santana, 2006; Shi *et al.*, 1999; Shi y Liu, 1993; Shi, 2009; Sun *et al.*, 2010; Teräsvirta *et al.*, 2005; Terui y Van Dijik, 2002; Tsangari, 2007; Wichard, 2011; Wichard y Ogorzalek, 2004; Xiao *et al.*, 2009; Hu y Tsoukalas, 1999; Yu *et al.*, 2005).
4. Mediante la variación del tipo de algoritmo de entrenamiento de cada experto (Badri *et al.*, 1998; Chiewchanwattana y Lursinsap, 2002; Lai *et al.*, 2006; Leone *et al.*, 2006; Ruta *et al.*, 2011; Schwaerzel y Rosen, 1997; Soto *et al.*, 2010; Van Heeswijk *et al.*, 2009; Zhang y Berardi, 2001).
  5. Mediante la variación del método de especificación o de la configuración de los expertos (Pulido *et al.*, 2009; Teräsvirta *et al.*, 2005; Yu *et al.*, 2008; Li y Deng, 2008).
  6. Mediante el uso de un algoritmo de optimización basado en poblaciones (Harrald y Kamstra, 1997; Islam *et al.*, 2003; Kim y Kim, 1997; Landassuri y Bullinaria, 2009; Zeng y Qui, 2003).
  7. Mediante la variación de los insumos del modelo (Lin y Zhu, 2007; Lin y Zhu, 2007).

*Respuesta a la pregunta 5.3: ¿cuáles son los métodos usados para obtener un pronóstico combinado?* Los métodos más usados para combinar pronósticos son la media aritmética y la combinación lineal óptima. Muchos de los trabajos están basados en la combinación de pronósticos de todos los expertos en el ensamble; sólo en Landassuri y Bullinaria (2009) se considera el problema de la selección apropiada de las variables de entrada de los combinadores. En el caso de la combinación lineal óptima, sólo un estudio utiliza la función de pérdida lineal, el de Prudencio y Ludermir (2006). A continuación se enumeran las metodologías reportadas en la literatura.

1. Para los modelos que usan el mismo tipo de expertos: basados en la varianza (Chen y Zhang, 2005; Inoue y Narihisa, 2000), ensamble de los mejores individuos (Landassuri y Bullinaria, 2009), modelos difusos (Pulido, Mancilla y Melin, 2009), modelo de síntesis difusa (Yang y Ma, 2010; Yang y Shi, 2010), perceptrones multicapa (Aladag *et al.*, 2010; Donaldson y Kamstra, 1999; Landassuri y Bullinaria, 2009; Donaldson y Kamstra, 1996), combinación lineal óptima (Kurogi *et al.*, 2007; Palit

- y Popovic, 2000; Peng y Zhu, 2009; Peralta *et al.*, 2010; Ruta y Gabrys, 2007; Soto *et al.*, 2010; Zeng y Qui, 2003; Yu *et al.*, 2008; Li y Deng, 2008), ordenamiento basado en una combinación lineal (Landassuri y Bullinaria, 2009), funciones de base radial (Yu *et al.*, 2008), conjuntos rugosos (Ahmed *et al.*, 2009), media aritmética simple (Deng *et al.*, 2005; Inoue y Narihisa, 2000; Islam *et al.*, 2003; Landassuri y Bullinaria, 2009; Palit y Popovic, 2000; Peng y Zhu, 2009; Ruta y Gabrys, 2007; Schwaerzel y Rosen, 1997; Soto *et al.*, 2010; Van Heeswijk *et al.*, 2009; Ribeiro *et al.*, 2010), máquinas de vectores de soporte (Lai *et al.*, 2006; Wang y Li, 2010).
2. Para los modelos que usan diferentes tipos de expertos: combinación dinámica (*dynamic pooling*) (Riedel y Gabrys, 2007), redes neuronales difusas (Dong, 2000), sistema de inferencia difusa (Palit y Popovic, 2000; Xiao *et al.*, 2009), sistema generalizado difuso de Takagi-Sugeno (Fiordaliso, 1998), métodos de kernel (Chen y Zhang, 2005; Sun *et al.*, 2010), perceptrones multicapa (Shi *et al.*, 1996; Badri, 1997; Badri *et al.*, 1998; Donaldson y Kamstra, 1999; Harrald y Kamstra, 1997; Shi-Ying, 2009; Shi y Liu, 1993; Hu y Tsoukalas, 1999), redes neuronales neurodifusas (Palit y Popovic, 2000), combinación óptima de pesos (Han *et al.*, 2007; Harrald y Kamstra, 1997; Lubecke *et al.*, 1998; Tasangari, 2007; Wang y Li, 2010; Yu *et al.*, 2005), por minimización del error medio absoluto sujeto a que los pesos de ponderación sumen la unidad (Prudencio y Ludermit, 2006), método de mejor desempeño (Lemke y Gabrys, 2010; Ruta y Gabrys, 2011), promedio aritmético simple (Andrawis *et al.*, 2011; Lemke y Gabrys, 2010; Lubecke *et al.*, 1998; Ruta y Gabrys, 2011; Teräsvirta *et al.*, 2005), promedio simple con exclusión de datos (Lemke y Gabrys, 2010; Ruta y Gabrys, 2011), sistema difuso de Takagi-Sugeno (Fiordaliso, 1998; Shi-Ying, 2009), combinación lineal cambiante en el tiempo (Terui *et al.*, 2002), pesos basados en la varianza (Chiewchanwattana y Lursinsap, 2002; Gomes *et al.*, 2006; Kim y Kim, 1997; Lemke y Gabrys, 2010; Ruta y Gabrys, 2011; Schwaerzel y Rosen, 1997).

*Respuesta a la pregunta 5.4: ¿qué tipos de series de tiempo han sido pronosticadas?* La mayoría de los modelos propuestos son evaluados mediante la comparación de su precisión cuando se pronostican series de tiempo caóticas. Adicionalmente, se encontró que el problema de la volatilidad

del pronóstico de series de tiempo ha sido abordado también por Harrald y Kamstra (1997), Hu y Tsoukalas (1999), Donaldson y Kamstra (1999) y Dong (2002).

Los tipos de series de tiempo que han sido pronosticadas usando metodologías de combinación de pronósticos son: series de tiempo caóticas comúnmente usadas como *benchmark* (Chen y Zhang, 2005; Chiewchanwattana y Lursinsap, 2002; Deng *et al.*, 2005; Inoue y Narihisa, 2000; Inoue, 2000; Islam *et al.*, 2003; Landassuri-Moreno y Bullinaria, 2009; Palit y Popovic, 2000; Peng y Zhu, 2009; Peralta *et al.*, 2010; Soto *et al.*, 2010; Yang y Ma, 2010; Yang y Shi, 2010; Zeng y Qiu, 2003; Li y Deng, 2008; Inoue y Narihisa, 2005), series de tiempo no lineales comúnmente usadas como *benchmark* (Chiewchanwattana y Lursinsap, 2002; Deng *et al.*, 2005; Fiordaliso, 1998; Gomez *et al.*, 2006; Landassuri-Moreno y Bullinaria, 2009; Peralta *et al.*, 2010; Terui y Van Dijk, 2002; Wichard y Ogorzałek, 2004), series de tiempo económicas (Han *et al.*, 2007; Santana, 2006; Teräsvirta *et al.*, 2005; Terui y Van Dijk, 2002; Van Heeswijk *et al.*, 2009; Xiao, Gong y Zou, 2009; Lin y Zhu, 2007), tasas de cambio (Lai *et al.*, 2006; Lubecke *et al.*, 1998; Schwaerzel y Rosen, 1997; Sun *et al.*, 2010; Tsangari, 2007; Zhang y Berardi, 2001; Yu *et al.*, 2005; Yu *et al.*, 2008), volatilidad de las tasas de cambio (Hu y Tsoukalas, 1999), precios del mercado de valores (Shi *et al.*, 1999; Shi y Liu, 1993), la volatilidad de los rendimientos de acciones en mercados de valores (Donaldson y Kamstra, 1999; Dong, 2002; Harrald y Kamstra, 1997), índices de mercados de valores (Aladag *et al.*, 2010; Bouchachia, 2009; Lai *et al.*, 2006; Pulido *et al.*, 2009; Wang y Li, 2010), bases de datos de series de tiempo usadas en competencias de pronósticos (Andrawis *et al.*, 2011; Kurogi *et al.*, 2007; Lemke y Gabrys, 2010; Prudencio y Ludermir, 2006; Ruta y Gabrys, 2007; Ruta *et al.*, 2011; Wichard, 2011; Wichard y Ogorzałek, 2007).

## Conclusiones

En este trabajo se presentan los resultados de un estudio de mapeo sistemático realizado con el fin de determinar el estado actual de las investigaciones sobre la combinación de pronósticos y los métodos de ensamble de pronósticos cuando algunos de los expertos del sistema o la técnica de combinación es una metodología propia de la inteligencia computacional.

La metodología empleada permitió recuperar 75 estudios relevantes respecto a las preguntas de investigación abordadas en este trabajo. Se encontró que este tipo de metodologías han sido abordadas en estadística y en inteligencia computacional desde ópticas diferentes en sus inicios, pero la evolución de los trabajos permite observar la convergencia de las investigaciones. La temática investigada es tan relevante que ha habido un incremento en el número de publicaciones en los últimos seis años.

Las principales investigaciones sobre esta temática han sido ampliamente difundidas en la comunidad científica a través de la publicación de artículos en revistas de alto impacto como *International Journal of Forecasting* o las memorias de la *IEEE International Conference on Neural Networks*.

Los resultados obtenidos muestran una amplia gama de técnicas utilizadas como expertos o para la combinación de los pronósticos; no obstante, los trabajos presentan dispersión respecto a las series de tiempo utilizadas, de manera que no es posible extraer recomendaciones sobre cuáles podrían ser las metodologías más apropiadas, e incluso hablar de una metodología para la construcción de este tipo de modelos.

La investigación es limitada en el sentido de que sólo se consideraron aquellos artículos en que uno de los expertos o la metodología para la combinación de pronósticos es una técnica de inteligencia computacional. De esta manera, no se tuvo en cuenta un amplio cuerpo de literatura sobre la combinación de pronósticos, que en un momento determinado debería vincularse para alcanzar una visión más general sobre el área de la combinación de pronósticos.

---

## Bibliografía

- Ahmed, E., Yang, W. y Abdullah, M. (2009). Novel method of the combination of forecasts based on rough sets. *Journal of Computer Science*, 5(6), 440-444.
- Aladag, C., Egrioglu, E. y Yolcu, U. (2010). Forecast combination by using artificial neural networks. *Neural Processing Letters*, 32(3), 269-276.
- Andrawis, R., Atiya, A. y El-Shishiny, H. (2011). Forecast combinations of computational intelligence and linear models for the NN5 time series forecasting competition. *International Journal of Forecasting*, 27(3), 672-688.

- Azmy, W., Atiya, A. F. y El-Shishiny, H. (2010). Forecast combination strategies for handling structural breaks for time series forecasting. Lecture notes in computer science (including subseries Lecture notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) 5997 INCS, 245-253.
- Badri, M. (1997). Neural networks of combination of forecasts for data with long memory pattern. *International Journal of Information and Management Sciences*, 8(2), 19-34.
- Badri, M. (1996). Neural networks of combination of forecasts for data with long memory pattern. *IEEE International Conference on Neural Networks - Conference Proceedings*, 1, 359-364.
- Badri, M., Al-Mutawa, A. y Murtagy, A. (1998). Neural networks of data inhibiting long memory pattern. *Computers and Industrial Engineering*, 35(3-4), 551-554.
- Barnard G. (1963). New methods of quality control. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 126, 255-259.
- Bates, J. y Granger, C. (1969). The combination of forecasts. *Operations Research Quarterly*, 20, 451-468.
- Bouchachia, A. (2009). Radial basis function nets for time series prediction. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 2(2), 147-157.
- Breiman, L. (1996). Stacked regressions. *Machine Learning*, 24, 49-64.
- Cai, J., Hu, S. y Tao, H. (2007). Prediction of chaotic time series based on selective support vector machine ensemble. *Wuli Xuebao/Acta Physica Sinica*, 56(12), 6820-6827.
- Chen, A. N. y Leung, M. (2005). Performance evaluation of neural network architectures: The case of predicting foreign exchange correlations. *Journal of Forecasting*, 24(6), 403-420.
- Chen, D. y Zhang, J. (2005). Time series prediction based on ensemble ANFIS. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics, ICMLC*.
- Chiewchanwattana, S. y Lursinsap, C. (2002). FI-GEM networks for incomplete time-series prediction. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks 2*, 1757-1762.
- Clemen, R. T. (1989). Combining forecasts: A review and annotated bibliography. *International Journal of Forecasting*, 5, 559-583.
- Clements, M. y Harvey, D. (2009). Forecast combination and encompassing. En Mills, T. C. y Patterson, K. (eds.), *Palgrave handbook of econometrics, volume 2: Applied econometrics*, 169-198. Basingstoke: Palgrave MacMillan.
- Clements, M. y Harvey, D. (2011). Combining probability forecasts. *International Journal of Forecasting*, 27(2), 208-223.

- De Menezes, L., Bunn, D. y Taylor, J. (2000). Review of guidelines for the use of combined forecasts. *European Journal of Operational Research*, 120, 190-204.
- Deng, Y., Jin, X. y Zhong, Y. (2005). Ensemble SVR for prediction of time series. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics, ICMLC*, 3528-3534.
- Diebold, F. y López, J. (1996). Forecast evaluation and combination. En *Handbook of statistics*, 14, 241-268. Amsterdam: North-Holland.
- Donaldson, R. y Kamstra, M. (1996). Forecast combining with neural networks. *Journal of Forecasting*, 15(1), 49-61.
- Donaldson, R. y Kamstra, M. (1999). Neural network forecast combining with interaction effects. *Journal of the Franklin Institute*, 336(2), 227-236.
- Dong, J. (2000). Research on the method of nonlinear combining forecasts based on fuzzy-neural systems. *Proceedings of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA) 2*, 899-903.
- Dong, J. (2002). A nonlinear combining forecast method based on fuzzy neural network. *Proceedings of 2002 International Conference on Machine Learning and Cybernetics 4*, 2160-2164.
- Fiordaliso, A. (1998). A nonlinear forecast combination method based on Takagi-Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Forecasting*, 14, 367-379.
- Fiordaliso, A. (1998). A constrained Takagi-Sugeno fuzzy system that allows for better interpretation and analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 118(2), 307-318.
- Gomes, G., Maia, A., Ludermir, T., Carvalho, F. de y Araujo, A. (2006). Hybrid model with dynamic architecture for forecasting time series. *IEEE International Conference on Neural Networks—Conference Proceedings*, 1716613, 3742-3747.
- Granger, C. (1989). Combining forecasts—twenty years later. *Journal of Forecasting*, 8, 167-173.
- Hall, S. y Mitchell, J. (2007). Combining density forecasts. *International Journal of Forecasting*, 23(1), 1-13.
- Han, D., Niu, W. y Yu, C. (2007). The comparative study on linear and non-linear forecast-combination methods based on neural network. *International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, WICOM*, 4341155, 5627-5630.
- Hansen, B. (2006). Interval forecasts and parameter uncertainty. *Journal of Econometrics*, 135(1-2), 377-398.
- Harrald, P. y Kamstra, M. (1997). Evolving artificial neural networks to combine financial forecasts. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1), 40-52.

- Hashem, S. (1997). Optimal linear combinations of neural networks. *Neural Networks*, 10, 599-614.
- Hashem, S. y Schmeiser, B. (1993). Approximating a function and its derivatives using MSE-optimal linear combinations of trained feedforward neural networks. En *Proceedings of the 1993 World Congress on Neural Networks*, 1, 617-620. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hashem, S. y Schmeiser, B. (1995). Improving model accuracy using optimal linear combinations of trained neural networks. *IEEE Transaction son Neural Networks*, 6(3), 792-794.
- HAYKIN, S. (1996). *Neural networks: A comprehensive study*. Prentice Hall International.
- Hendry, D. y Clements, M. (2004). Pooling of forecasts. *Econometrics Journal*, 7, 1-31.
- Hu, M. Y. y Tsoukalas, C. (1999). Combining conditional volatility forecasts using neural networks: An application to the EMS exchange rates. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 9(4), 407-422.
- Inoue, H. y Narihisa, H. (2000). Effect of parallel ensembles to self-generating neural networks for chaotic time series prediction. *Neural Networks for Signal Processing – Proceedings of the IEEE Workshop*, 2, 896-905.
- Inoue, H. y Narihisa, H. (2005). Parallel performance of ensemble self-generating neural networks for chaotic time series prediction problems. *Systems and Computers in Japan*, 36(10), 82-92.
- Inoue, H. y Narihisa, H. (2000). Predicting chaotic time series by ensemble self-generating neural networks. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 2, 231-236.
- Islam, M., Yao, X. y Murase, K. (2003). A constructive algorithm for training cooperative neural network ensembles. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(4), 820-834.
- Jacobs, R. A. y Jordan, M. (1991). A competitive modular connectionist architecture. En Lippmrum, R., Moody, J. y Touretzky, D. (eds.). *Advances in neural information processing system*, 3, 767-773. California: Morgan Kaufman.
- Jacobs, R. A. y Jordan, M. (1994). Hierarchical mixtures of experts and the EM algorithm. *Neural Computation*, 6, 181-214.
- Jacobs, R., Jordan, M., Nowlan, S. y Hinton, G. (1991). Adaptive mixtures of local experts. *Neural Computation*, 3, 79-87.
- Kim, D. y Kim, C. (1997). Forecasting time series with genetic fuzzy predictor ensemble. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 5(4), 523-535.

- Kitchenham, B. (2004). Procedures for undertaking systematic reviews. *Joint Technical Report*. Computer Science Department, Keele University (TR/SE-0401) and National ICT Australia Ltd. (0400011T.1).
- Kitchenham, B. y Charters, S. (2007). Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering. Technical Report EBSE-2007-01.
- Kitchenham, B., Dybå, T. y Jørgensen, M. (2004). Evidence-based software engineering. En *Proceedings of the 26th International Conference on Software Engineering*, IEEE Computer Society, Washington DC, 273-281.
- Kitchenham, B., Pfleeger, S., Pickard, L., Jones, P., Hoaglin, D., El Emam, K. y Rosenberg, J. (2002). Preliminary guidelines for empirical research in software engineering. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 28(8), 721-734.
- Kurogi, S., Koyama, R., Tanaka, S. y Sanuki, T. (2007). Forecasting using first-order difference of time series and bagging of competitive associative nets. *IEEE International Conference on Neural Networks - Conference Proceedings*, 4370949, 166-171.
- Lai, K. K., Yu, L., Wang, S. y Wei, H. (2006). A novel nonlinear neural network ensemble model for financial time series forecasting. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) 3991 INCS - I, 790-793.
- Landassuri-Moreno, V. y Bullinaria, J. (2009). Neural network ensembles for time series forecasting. *Proceedings of the 11th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference, GECCO-2009*, 1235-1242.
- Lemke, C. y Gabrys, B. (2010). Meta-learning for time series forecasting and forecast combination. *Neurocomputing*, 73(10-12), 2006-2016.
- Leone-Filho, M., Ohishi, T. y Ballini, R. (2006). Ensembles of selected and evolved predictors using genetic algorithms for time series prediction. *IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2006*, 2872-2879.
- Li, X. y Deng, Z. (2008). Prediction of turning points for chaotic time series using ensemble ANN model. *Proceedings of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, 4593474, 3459-3464.
- Lin, J. y Zhu, B. (2007). Neural network ensemble based on feature selection. *IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA*, 4376681, 1844-1847.
- Lubecke, T., Nam, K., Markland, R. y Kwok, C. (1998). Combining foreign exchange rate forecasts using neural networks. *Global Finance Journal*, 9(1), 5-27.
- Naftaly, U., Intrator, N. y Horn, D. (1997). Optimal ensemble averaging of neural networks. *Network: Computation in Neural Systems*, 8(3), 283-296.

- Newbold, P. y Granger, C. (1974). Experience with forecasting univariate time series and the combination of forecasts (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 137, 131-164.
- Newbold, P. y Harvey, D. (2002). Forecasting combination and encompassing. En Clements, M. y Hendry, D. (eds.), *A companion to economic forecasting* (268-283). Oxford: Blackwell.
- Palit, A. K. y Popovic, D. (2000). Nonlinear combination of forecasts using artificial neural network, fuzzy logic and neuro-fuzzy approaches. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems 2*, 566-571.
- Peng, S. y Zhu, S. (2009). Application of neural network ensemble in nonlinear time-series forecasts. *2nd International Conference on Intelligent Computing Technology and Automation, ICICTA*, 1, 5287713, 45-47.
- Peralta, J., Gutierrez, G. y Sanchis, A. (2010). Time series forecasting by evolving artificial neural networks using "Shuffle", cross-validation and ensembles. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* 6352 LNCS (Part 1).
- Perone, M. (1993). *Improving regression estimation: Averaging methods for variance reduction with extensions, to general convex measure optimization*. PhD. thesis. Brown University, Rhode Island.
- Prudencio, R. y Ludermir, T. (2006). Learning weights for linear combination of forecasting methods. *Proceedings of the Ninth Brazilian Symposium on Neural Networks, SBRN'06*, 4026820.
- Prudencio, R. y Ludermir, T. (2004). Using machine learning techniques to combine forecasting methods. *Lecture notes in artificial intelligence (subseries of Lecture Notes in Computer Science)* 3339, 1122-1127.
- Pulido, M., Mancilla, A. y Melin, P. (2009). An ensemble neural network architecture with fuzzy response integration for complex time series prediction. *Studies in Computational Intelligence*, 257, 85-110.
- Reid, D.J. (1968). Combining three estimates of gross domestic products. *Economica*, 35, 431-444.
- Ribeiro, C., Goldschmidt, R. y Choren, R. (2010). An extensible ensemble environment for time series forecasting. *LCEIS, Proceedings of the 12th International Conference on Enterprise Information Systems, 2 AIDSS*.
- Riedel, S. y Gabrys, B. (2007). Dynamic pooling for the combination of forecasts generated using multi level learning. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 454-459.

- Ruta, D. y Gabrys, B. (2007). Neural network ensembles for time series prediction. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 4371129, 1204-1209.
- Ruta, D., Gabrys, B. y Lemke, C. (2011). A generic multilevel architecture for time series prediction. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 23(3), 350-359.
- Santana, J. C. (2006). Forecasting time series with neural networks: An application to the Colombian inflation. *Revista Colombiana de Estadística*, 29(1), 77-92.
- Schapire, R. (1990). The strength of weak learnability. *Machine Learning*, 5, 197-227.
- Schwaerzel, R. y Rosen, B. (1997). Improving the accuracy of financial time series prediction using ensemble networks and high order statistics. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 4, 2045-2050.
- Shi, S. M., Xu, L. D. y Liu, B. (1999). Improving the accuracy of nonlinear combined forecasting using neural networks. *Expert Systems with Applications*, 16(1), 49-54.
- Shi, S. y Liu, L. (1993). Nonlinear combination of forecasts with neural networks. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 1, 959-962.
- Shi, S., Xu, L.D. y Liu, B. (1996). Applications of artificial neural networks to the nonlinear combination of forecasts. *Expert Systems*, 13(3), 195-201.
- Shi-Ying, S. (2009). Study on the technique and error analysis of nonlinear combining forecasts based fuzzy system. *Proceedings International Conference on Electronic Computer Technology, ICECT*, 4795989, 385-387.
- Soto, J., Castillo, O. y Soria, J. (2010). Chaotic time series prediction using ensembles of ANFIS. *Studies in Computational Intelligence*, 318, 287-301.
- Sun, B., Xie, C., Wang, G. y Zhang, J. (2010). The combining prediction of the RMB exchange rate series based on diverse architectural artificial neural network ensemble methodology. *Proceedings 2010 IEEE 5th International Conference on Bio-Inspired Computing: Theories and Applications*, 5645218, 743-749.
- Tay, A. S. y Wallis, K. F. (2000). Density forecasting: A survey. *Journal of Forecasting*, 19, 235-254.
- Teräsvirta, T., Van Dijk, D. y Medeiros, M. C. (2005). Linear models, smooth transition autoregressions, and neural networks for forecasting macroeconomic time series: A re-examination. *International Journal of Forecasting*, 21(4), 755-774.
- Terui, N. y Van Dijk, H. (2002). Combined forecasts from linear and nonlinear time series models. *International Journal of Forecasting*, 18(3), 421-438.

- Timmerman, A. (2006). Forecast combinations. En Elliot, G., Granger, C. W. J. y Timmerman, A. (eds.), *Handbook of economic forecasting*. Amsterdam: North-Holland.
- Tsangari, H. (2007). An alternative methodology for combining different forecasting models. *Journal of Applied Statistics*, 34(4), 403-421.
- Van Heeswijk, M., Miche, Y., Lindh-Knuutila, T., Hilbers, P. A. J., Honkela, T., Oja, E. y Lendasse, A. (2009). Adaptive ensemble models of extreme learning machines for time series prediction. Lecture notes in computer science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) 5769 LNCS (Part 2), 305-314.
- Wang, D. y Li, Y. (2010). A novel nonlinear RBF neural network ensemble model for financial time series forecasting. *3rd International Workshop on Advanced Computational Intelligence, IWACI*, 5585218, 86-90.
- Wichard, J. D. (2011). Forecasting the NN5 time series with hybrid models. *International Journal of Forecasting*, 27(3), 700-707.
- Wichard, J. D. y Ogorzałek, M. (2004). Iterated time series prediction with ensemble models. *Proceedings of the LASTED International Conference on Modelling, Identification and Control*, 23(412-185), 512-517.
- Wichard, J. D. y Ogorzałek, M. (2007). Time series prediction with ensemble models applied to the CATS benchmark. *Neurocomputing*, 70(13-15), 2371-2378.
- Winkler, R. L. y Makridakis, S. (1983). The combination of forecasts. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 146(2), 150-157.
- Xiao, Z., Gong, K. y Zou, Y. (2009). A combined forecasting approach based on fuzzy soft sets. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1), 326-333.
- Yang, H. y Shi, J. (2010). A three-stage SVM ensemble algorithm for chaotic time series prediction. *2nd International Workshop on Education Technology and Computer Science, ETCS*.
- Yang, H. y Ma, H. (2010). Chaotic time series prediction based on fuzzy possibility C-mean and composite kernel support vector regression. *ICIME 2010 - 2010 2nd IEEE International Conference on Information Management and Engineering* 2(5477442), 236-239.
- Yu, L., Lai, K.K. y Wang, S. (2008). Multistage RBF neural network ensemble learning for exchange rates forecasting. *Neurocomputing*, 71(16-18), 3295-3302.
- Yu, L., Wang, S. y Lai, K.K. (2005). A novel nonlinear ensemble forecasting model incorporating GLAR and ANN for foreign exchange rates. *Computers and Operations Research*, 32(10), 2523-2541.

- Zeng, F. y Qiu, Z. (2003). Predicting chaotic time series by ensemble self generating neural networks merged with genetic algorithm. *Proceedings of International Conference on Neural Networks and Signal Processing, ICNNSP'03*.
- Zhang, G. P. (2007). A neural network ensemble method with jittered training data for time series forecasting. *Information Sciences*, 177(23), 5329-5346.
- Zhang, G. P. y Berardi, V. L. (2001). Time series forecasting with neural network ensembles: An application for exchange rate prediction. *Journal of the Operational Research Society*, 52(6), 652-664.
- Zhao, Z., Zhang, Y. y Liao, H. (2008). Design of ensemble neural network using the Akaike information criterion. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(8), 1182-1188.

## Apéndice A

A continuación se presenta el listado de los artículos referenciados en las tablas 1 y 2:

- [1] Badri, M. A. (1998). Neural networks of combination of forecasts for data with long memory pattern. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 1, 359-364.
- [2] Andrawis, R. R., Atiya, A. F. y El-Shishiny, H. (2011). Forecast combinations of computational intelligence and linear models for the NN5 time series forecasting competition. *International Journal of Forecasting*, 27(3), 672-688.
- [3] Azmy, W. M., Atiya, A. F. y El-Shishiny, H. (2010). Forecast combination strategies for handling structural breaks for time series forecasting. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* 5997 LNCS, 245-253.
- [4] Chen, A. N.-S. y Leung, M. T. (2005). Performance evaluation of neural network architectures: The case of predicting foreign exchange correlations. *Journal of Forecasting*, 24(6), 403-420.
- [5] Chiewchanwattana, S. y Lursinsap, C. (2002). FI-GEM networks for incomplete time-series prediction. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 2, 1757-1762.
- [6] Donaldson, R. G. y Kamstra, M. (1996). Forecast combining with neural networks. *Journal of Forecasting*, 15(1), 49-61.
- [7] FIORDALISO, A. (1998). A nonlinear forecast combination method based on Takagi-Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Forecasting*, 14, 367-379.
- [8] Gomes, G. S. S., Maia, A. L. S., Ludermir, T. B., De Carvalho, F. D. A. T. y Araujo, A. F. R. (2006). Hybrid model with dynamic architecture for forecasting time series. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 1716613, 3742-3747.
- [9] Harrald, P. G. y Kamstra, M. (1997). Evolving artificial neural networks to combine financial forecasts. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1), 40-52.
- [10] Inoue, H. y Narihisa, H. (2000). Predicting chaotic time series by ensemble self-generating neural networks. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 2, 231-236.

- [11] Islam, M. M., Yao, X. y Murase, K. (2003). A constructive algorithm for training cooperative neural network ensembles. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(4), 820-834.
- [12] Kim, D. y Kim, C. (1997). Forecasting time series with genetic fuzzy predictor ensemble. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 5(4), 523-535.
- [13] Kurogi, S., Koyama, R., Tanaka, S. y Sanuki, T. (2007). Forecasting using first-order difference of time series and bagging of competitive associative nets. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 4370949, 166-171.
- [14] Lai, K., Yu, L., Wang, S. y Wei, H. (2006). A novel nonlinear neural network ensemble model for financial time series forecasting. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* 3991 LNCS - I, 790-793.
- [15] Lemke, C. y Gabrys, B. (2010). Meta-learning for time series forecasting and forecast combination. *Neurocomputing*, 73(10-12), 2006-2016.
- [16] Peralta, J., Gutierrez, G. y Sanchis, A. (2010). Time series forecasting by evolving artificial neural networks using “Shuffle”, cross-validation and ensembles. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* 6352 LNCS (Part 1), 50-53.
- [17] Prudencio, R. y Ludermir, T. (2004). Using machine learning techniques to combine forecasting methods. *Lecture Notes in Artificial Intelligence (Subseries of Lecture Notes in Computer Science)* 3339, 1122-1127.
- [18] Pulido, M., Mancilla, A. y Melin, P. (2009). An ensemble neural network architecture with fuzzy response integration for complex time series prediction. *Studies in Computational Intelligence*, 257, 85-110.
- [19] Riedel, S. y Gabrys, B. (2007). Dynamic pooling for the combination of forecasts generated using multi level learning. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 4370999, 454-459.
- [20] Ruta, D. y Gabrys, B. (2007). Neural network ensembles for time series prediction. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 4371129, 1204-1209.
- [21] Schwaerzel, R. y Rosen, B. (1997). Improving the accuracy of financial time series prediction using ensemble networks and high order statistics. *IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings*, 4, 2045-2050.

- [22] Shi, S. y Liu, L. (1993). Nonlinear combination of forecasts with neural networks. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 1, 959-962.
- [23] Soto, J., Castillo, O. y Soria, J. (2010). Chaotic time series prediction using ensembles of ANFIS. *Studies in Computational Intelligence*, 318, 287-301.
- [24] Teräsvirta, T., Van Dijk, D. y Medeiros, M.C. (2005). Linear models, smooth transition autoregressions, and neural networks for forecasting macroeconomic time series: A re-examination. *International Journal of Forecasting*, 21(4), 755-774.
- [25] Terui, N. y Van Dijk, H. K. (2002). Combined forecasts from linear and nonlinear time series models. *International Journal of Forecasting*, 18(3), 421-438.
- [26] Van Heeswijk, M., Miche, Y., Lindh-Knuutila, T., Hilbers, P. A. J., Honkela, T., Oja, E. y Lendasse, A. (2009). Adaptive ensemble models of extreme learning machines for time series prediction. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* 5769 LNCS (Part 2), 305-314.
- [27] Wichard, J. D. (2011). Forecasting the NN5 time series with hybrid models. *International Journal of Forecasting*, 27(3), 700-707.
- [28] Wichard, J. D. y Ogorzałek, M. (2004). Iterated time series prediction with ensemble models. *Proceedings of the IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control*, 23(412-185), 512-517.
- [29] Wichard, J. D. y Ogorzałek, M. (2007). Time series prediction with ensemble models applied to the CATS benchmark. *Neurocomputing*, 70(13-15), 2371-2378. Recuperado de [www.scopus.com](http://www.scopus.com).
- [30] Yu, L., Lai, K.K. y Wang, S. (2008). Multistage RBF neural network ensemble learning for exchange rates forecasting. *Neurocomputing*, 71(16-18), 3295-3302.
- [31] Yu, L., Wang, S. y Lai, K.K. (2005). A novel nonlinear ensemble forecasting model incorporating GLAR and ANN for foreign exchange rates. *Computers and Operations Research*, 32(10), 2523-2541.
- [32] Zhang, G. P. (2007). A neural network ensemble method with jittered training data for time series forecasting. *Information Sciences*, 177(23), 5329-5346.
- [33] Zhang, G. P. y Berardi, V. L. (2001). Time series forecasting with neural network ensembles: An application for exchange rate prediction. *Journal of the Operational Research Society*, 52(6), 652-664.

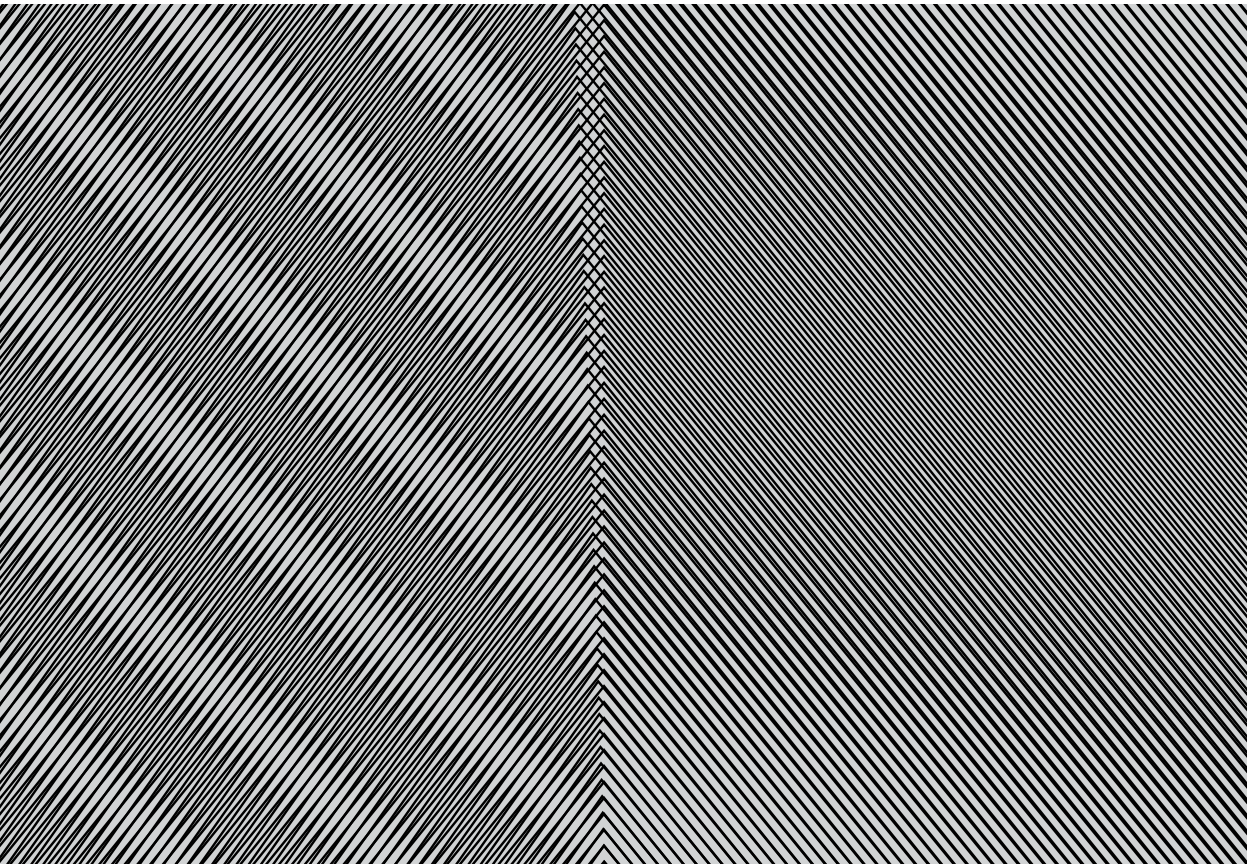
Arturo Lorenzo Valdés

Departamento de Contabilidad y Finanzas del Instituto Tecnológico y de  
Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

Antonio Ruíz Porras

Departamento de Métodos Cuantitativos del Centro Universitario de Ciencias  
Económico Administrativas de la Universidad de Guadalajara

# **Modelación de los rendimientos bursátiles mexicanos mediante los modelos TGARCH y EGARCH: un estudio econométrico para 30 acciones y el Índice de Precios y Cotizaciones**



## Introducción

La modelación de series económicas y financieras es necesaria para el análisis de decisiones de administración financiera. Estas decisiones, lo mismo que sus resultados, dependen en buena medida de la manera en que se describen y pronostican dichas series. La adecuada modelación de rendimientos de los activos es necesaria particularmente para analizar decisiones de inversión, valuación de activos y administración de riesgo. Por esta razón, los análisis econométricos de modelación de los rendimientos han tenido un gran desarrollo en las últimas décadas. Según Engle (2004), los orígenes de estos análisis se encuentran en los trabajos de Markowitz (1952) y Tobin (1958) sobre la media y varianza de portafolios financieros.

Las características de las series financieras hacen difícil su modelación empírica con las técnicas econométricas tradicionales. Las series suelen mostrar comportamientos muy volátiles. Usualmente las series manifiestan curtosis excesivas, *clusters* de volatilidad, volatilidades no constantes, distribuciones no normales y movimientos conjuntos de la volatilidad entre distintos activos y mercados financieros. Además de los anteriores, la volatilidad de los rendimientos frecuentemente experimenta “efectos apalancamiento”, esto es, reacciones asimétricas ante *shocks* informacionales de la misma magnitud y de signo contrario (por ejemplo las malas noticias tienen un impacto mayor que las buenas noticias).

Los modelos econométricos de la familia ARCH (*autoregressive conditional heteroscedasticity*) son los más utilizados para modelar series de rendimientos financieros. Son modelos *no lineales* de tipo autorregresivo con heteroscedasticidad condicional (ARCH). Su objetivo principal es modelar la varianza (y la volatilidad) de las series financieras. Particularmente, entre los modelos que integran esta familia se encuentran los denominados asimétricos, que modelan las series considerando que éstas experimentan efectos apalancamiento. Entre los más conocidos modelos asimétricos es-

tán los TGARCH y los EGARCH desarrollados, respectivamente, por Zakoian (1994) y Nelson (1991).<sup>1</sup>

En esta investigación desarrollamos un ejercicio comparativo de modelación de los rendimientos de los activos bursátiles mexicanos mediante los modelos no lineales TGARCH y EGARCH. Usamos estos modelos para describir las series de rendimientos bursátiles en forma desagregada (por acción) y agregada (considerando la totalidad del mercado). Modelamos particularmente las series de rendimientos diarios de 30 acciones y del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) durante el periodo comprendido entre el 7 de diciembre de 2005 y el 1 de agosto de 2011. El periodo de análisis es interesante en sí mismo en términos de modelación econométrica porque abarca momentos de relativa calma e inestabilidad en la economía global.

En esta investigación mostramos la conveniencia de usar modelos ARCH asimétricos mediante un ejercicio de modelación econométrica. Asimismo, en forma indirecta, evaluamos el impacto de la crisis global en el mercado bursátil mexicano. Para conseguir estos objetivos usamos las siguientes preguntas como guías de investigación: ¿qué características tienen las series de rendimientos de los activos bursátiles mexicanos? ¿Existen efectos apalancamiento en las series de rendimientos? ¿Cuáles son las ventajas de usar los modelos asimétricos TGARCH y EGARCH? ¿En qué casos es preferible usar cada uno de los modelos analizados? ¿Tuvo la crisis global algún efecto sobre el mercado y los activos bursátiles?

Desarrollamos esta investigación en varias etapas. En la primera planteamos los antecedentes de los modelos ARCH y mostramos cómo se han usado en México. En la segunda construimos las series de rendimientos de los activos bursátiles mexicanos. En la tercera analizamos y comparamos el comportamiento estadístico de las series considerando la existencia de periodos de calma e inestabilidad financiera global. Posteriormente estimamos los parámetros de los modelos TARCH y EGARCH para cada una de las 31 series analizadas. Por último, en la quinta etapa, analizamos los modelos estimados y evaluamos su bondad de ajuste con fines comparativos y de modelación econométrica.

Desde la perspectiva académica, nuestra investigación complementa la

<sup>1</sup> Los nombres TGARCH y EGARCH se derivan de las principales características de los modelos. TGARCH es el acrónimo de *threshold generalized autoregressive conditional heteroscedasticity* y EGARCH lo es de *exponential generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*.

escasa literatura econométrica referida a la modelación de los rendimientos bursátiles mexicanos. Hasta donde sabemos, Guzmán Plata (1998) ha publicado el único estudio en el que se modelan estos rendimientos a nivel desagregado. Su análisis, como otros posteriores, asume que los rendimientos bursátiles reaccionan simétricamente ante *shocks* informacionales. Si bien este supuesto es discutible, cabe señalar casi no hay estudios que hayan modelado series bursátiles mexicanas con modelos asimétricos. Una excepción es el trabajo de López Herrera (2004). Sin embargo, en dicho estudio únicamente se modela el índice agregado IPC.

## Modelos ARCH y modelación de los rendimientos bursátiles mexicanos

La familia de modelos que incluye a los autorregresivos con heteroscedasticidad condicional (ARCH) y los ARCH generalizados (GARCH) es la más usada para modelar series financieras. Se le conoce como “familia de modelos ARCH”. Los modelos de esta familia asumen que la información rezagada de una variable y su volatilidad condicionada son determinantes del comportamiento presente y futuro de las series. Metodológicamente, esta familia incluye modelos econométricos construidos con base en el enfoque de series de tiempo y cuyos orígenes se hallan en los estudios de Engle (1982) y Bollerslev (1986), en los que se plantean los modelos que dan origen a la familia ARCH.

Los modelos de la familia ARCH suelen ser no lineales y estar condicionados por la información disponible. Tradicionalmente se clasifican de acuerdo con sus especificaciones de modelación, que se refieren a la forma en que se postula la dinámica de comportamiento de la varianza condicional de las series financieras.<sup>2</sup> Las especificaciones de la varianza postuladas son importantes porque la volatilidad “verdadera” no es observable. De hecho, cada especificación de la varianza usualmente define un cierto tipo de modelo ARCH. En este contexto, es interesante señalar que hay más de un centenar

<sup>2</sup> Las especificaciones de los modelos ARCH también se refieren a la forma en que la información describe la media y la distribución probabilística de las series financieras.

de especificaciones distintas de la varianza condicional (Bollerslev, 2010).

En México es reciente el uso de los modelos ARCH para describir el comportamiento de variables financieras. Particularmente en lo que concierne al mercado bursátil, la mayoría de los estudios se centran en describir el comportamiento agregado del mercado. De hecho, muy pocos estudios han examinado el comportamiento de los activos bursátiles a nivel desagregado. Entre estos últimos se encuentran los trabajos de Guzmán (1998) y Cermeño y Solís (2009); el primero es quizá la primera aplicación de los modelos ARCH en México, su análisis econométrico se centra en la modelación de las acciones mexicanas, el segundo es un análisis comparativo de los rendimientos accionarios entre distintos sectores económicos.

Los trabajos que han estudiado las acciones del mercado bursátil mexicano son muy escasos. Entre éstos se encuentran los de López y Vázquez (2002), Trejo *et al.* (2006) y Durán *et al.* (2011). Sin embargo, ninguno de estos estudios se centra en la modelación del comportamiento ni en la volatilidad de las acciones. De hecho, casi no existen estudios que se hayan centrado en la volatilidad de los rendimientos accionarios a nivel individual. La excepción, nuevamente, es el estudio de Guzmán (1998), que describe la volatilidad de 33 acciones mediante modelos ARCH-M. Su estudio usa datos diarios del periodo 1995-1997.

En lo metodológico, las especificaciones usadas para modelar las varianzas de las series mexicanas han sido diversas. La mayoría asumen que el comportamiento de la varianza condicional es simétrico ante las buenas y malas noticias. Sin embargo, es justo reconocer que este supuesto no es consistente con la evidencia empírica. Si bien en la literatura existen varias especificaciones que asumen volatilidades asimétricas, éstas casi no se han utilizado en México. Una excepción es el estudio de López (2004), en el que se modela el comportamiento del mercado bursátil de manera agregada (IPC), usando los modelos TGARCH y EGARCH.

Finalizamos esta revisión de la literatura enfatizando que la modelación de los rendimientos bursátiles es un área de gran interés en la econometría financiera. Sin embargo, es necesario fomentar el uso de modelos de la familia ARCH en economías emergentes. Es bien sabido que la volatilidad de los mercados financieros emergentes suele ser mayor que en sus contrapartes de economías desarrolladas. Particularmente, en el contexto del mercado bursátil mexicano, creemos que es necesario desarrollar análisis economé-

tricos a nivel desagregado y usar especificaciones de la varianza que asuman la existencia de asimetrías. De hecho, con base en estas consideraciones justificamos el trabajo aquí desarrollado.

## Modelos TGARCH y EGARCH y metodología de análisis

Aquí estimamos la volatilidad de los rendimientos bursátiles de los activos mexicanos mediante modelos ARCH asimétricos. Los activos analizados incluyen treinta acciones individuales que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores y el índice agregado del mercado bursátil (IPC). En particular, estimamos los rendimientos de esos activos usando los precios diarios de cierre de cada activo  $i$  en el periodo  $t$ ,  $P_{it}$ . Asumiendo que los precios de los activos siguen un proceso continuo de interés compuesto, definimos la tasa de rendimiento de un activo  $i$  en el periodo  $t$ ,  $r_{it}$ , como el cambio en los logaritmos de los precios de los activos:<sup>3</sup>

$$r_{it} = \ln P_{it} - \ln P_{it-1} \quad (1)$$

En el análisis usamos dos especificaciones de modelación econométrica que asumen que la volatilidad es asimétrica ante *shocks* informacionales. Estas especificaciones definen los modelos no lineales TGARCH y EGARCH usados en esta investigación. En ambos modelos se permite que el impacto sobre la volatilidad futura de un *shock* negativo (malas noticias) sea mayor que uno positivo de magnitud equivalente (buenas noticias). Mediante estos impactos describimos los “efectos apalancamiento” que suelen mostrar las series de rendimientos. Usualmente la ocurrencia de los efectos apalancamiento se explica en términos de cambios parciales en las primas de riesgo (French *et al.*, 1987).

En este trabajo usamos los modelos EGARCH y TGARCH para describir la media y varianza condicionales de los rendimientos bursátiles ( $r_{it}$  y  $\sigma_{it}^2$ , respectivamente). En particular, el modelo TGARCH asume una especificación que permite que la desviación estándar condicionada dependa del

<sup>3</sup> Los cambios de los logaritmos de una variable denotan cambios relativos, los cuales, al ser multiplicados por cien, denotan cambios porcentuales.

signo de los *shocks* rezagados. Este modelo fue desarrollado originalmente por Zakoian (1994). Para efectos de modelación, aquí usamos un modelo AR(1)-TGARCH(1,1):

$$r_{it} = \varphi_{i0} + \varphi_{i1}r_{it-1} + u_{it}$$

$$u_{it} = \sigma_{it}\mathcal{E}_{it} \quad (2)$$

$$\sigma_{it}^2 = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}u_{it-1}^2 + \gamma_i u_{it-1}^2 I_{it-1} + \beta_i \sigma_{it-1}^2$$

$$\text{donde } I_{it} = \begin{cases} 1 & u_{it-1} < 0 \\ 0 & u_{it-1} \geq 0 \end{cases}$$

En el modelo TGARCH los *shocks* tienen impactos diferenciados en la varianza condicional. Los *shocks* positivos ( $u_{it-1} > 0$ ) tienen un impacto  $\alpha_{i1}$ . Los negativos ( $u_{it-1} < 0$ ) tienen un impacto  $\alpha_{i1} + \gamma_i$ . Por lo tanto, si  $\gamma_i \neq 0$ , los *shocks* (noticias) tienen un impacto asimétrico. Particularmente si  $\gamma_i > 0$ , las malas noticias incrementan la volatilidad y ocurre el “efecto apalancamiento”. Los coeficientes de la especificación de la varianza se postulan como positivos.

El segundo modelo estimado es una variación del modelo EGARCH. En el mismo, como en el desarrollado por Nelson (1991), se permiten asimetrías en la relación entre los rendimientos y la volatilidad. El modelo de tipo AR(1)-TGARCH(1,1) es el siguiente:<sup>4</sup>

$$r_{it} = \varphi_{i0} + \varphi_{i1}r_{it-1} + u_{it},$$

$$u_{it} = \sigma_{it}\mathcal{E}_{it}, \quad (3)$$

$$\ln\sigma_{it}^2 = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \frac{|\mathcal{E}_{it-1}|}{\sigma_{it-1}^2} + \gamma_i \frac{\mathcal{E}_{it-1}}{\sigma_{it-1}^2} + \beta_i \ln\sigma_{it-1}^2.$$

<sup>4</sup> El modelo EGARCH usado en este trabajo difiere de aquel desarrollado por Nelson (1991). La especificación de la varianza condicional y la distribución de los errores condicionados son distintas.

En este modelo la última expresión describe el logaritmo de la varianza condicional. Esto implica que el efecto apalancamiento es exponencial, no cuadrático, y que los pronósticos de la varianza condicional son no negativos. Si  $\gamma_i < 0$ , hay efectos apalancamiento. Si  $\gamma_i \neq 0$ , los *shocks* tienen un impacto asimétrico. Igual que en el modelo anterior, los coeficientes de la especificación de la varianza se postulan positivos teóricamente.

Los modelos ARCH arriba descritos tienen una estructura similar y supuestos estadísticos comunes.<sup>5</sup> En ambos casos la estructura dinámica de los modelos está integrada por tres expresiones matemáticas y una estructura de rezagos de orden uno.<sup>6</sup> Particularmente, la primera expresión es la especificación de la media de los rendimientos. La segunda es la condición que define un proceso ARCH (Bollerslev, 2010). La tercera es la especificación de la varianza condicional. En lo estadístico, asumimos que los errores condicionados  $\varepsilon_{it}$  se distribuyen como una normal estandarizada en ambos modelos. Las especificaciones de la media y la varianza, aunadas a la distribución de probabilidad, definen los modelos ARCH.

La estimación econométrica de los errores estándar de ambos modelos se hace mediante el método de cuasi máxima verosimilitud (*quasi-maximum likelihood, QML*) propuesto por Bollerslev y Wooldridge (1992). Este método tiene la ventaja de que nos permite estimar errores estándar robustos (consistentes y eficientes), asumiendo la existencia de heteroscedasticidad. Usamos estos errores para calcular los estadísticos *z*. El uso de este método se justifica cuando los errores pudieran no estar condicionalmente distribuidos como una normal. Si pudiésemos garantizar dicha normalidad, la estimación podría hacerse en forma mediante el método de máxima verosimilitud (*maximum likelihood, ML*).

Hacemos el análisis estadístico y comparativo de los modelos mediante estadísticos complementarios. Concretamente, evaluamos la significancia individual de cada coeficiente mediante los *p-values* asociados a los esta-

<sup>5</sup> Es importante señalar que las mayores diferencias entre ambos modelos se refieren a los signos esperados de los coeficientes que evalúan la existencia del efecto apalancamiento  $\gamma_i$ . En el modelo TGARCH debe ocurrir que  $\gamma_i > 0$ . En el modelo EGARCH debe ocurrir que  $\gamma_i < 0$ .

<sup>6</sup> Los rezagos de orden uno se refieren a los términos autorregresivo, GARCH y de asimetría de los modelos. Estos rezagos definen el sistema de ecuaciones por evaluar empíricamente. La adopción de dicho orden de rezagos se justifica con base en los correlogramas de los residuales y de los residuales al cuadrado asociados. En la mayoría de los casos, cuando se adoptaron rezagos unitarios, los correlogramas sugirieron ruido blanco y, por lo tanto, un buen ajuste inicial.

dísticos  $z$ . Posteriormente comparamos la significancia y el signo de los coeficientes con los postulados teóricamente. Evaluamos la bondad de ajuste mediante los estimadores del logaritmo de verosimilitud (*log-likelihood*) y del criterio de información de Akaike (AIC). La relevancia de estos estimadores estriba en que nos proporcionan criterios alternativos para elegir al mejor modelo descriptivo de los rendimientos de cada activo bursátil.

## Datos

Utilizamos la base de datos de Economía para obtener una muestra de datos bursátiles de la Bolsa Mexicana de Valores. La muestra incluye los precios de cierre de las principales acciones que integran el Índice de Precios y Cotizaciones registrados del 6 de diciembre de 2005 al 1 de agosto de 2011. Asimismo, incluye datos diarios del IPC. Todos los datos son nominales. Así, la muestra está integrada por 31 series de precios, y cada serie incluye 1,475 observaciones diarias. Esta muestra nos sirve para construir 31 series de rendimientos bursátiles con base en la ecuación (1). Estas series de rendimientos, cada una con 1,474 observaciones, constituyen la base de datos de esta investigación.

Históricamente, el periodo analizado se caracteriza por momentos de relativa calma y de gran inestabilidad en los mercados financieros internacionales. Por esta razón, dividimos las series de rendimientos considerando dos periodos. El primero abarca del 7 de diciembre de 2005 al 9 de agosto de 2007, el segundo del 10 de agosto de 2007 al 1 de agosto de 2011. La determinación de estos periodos, si bien es subjetiva, se sustenta en el reconocimiento de la existencia de la “crisis global” en los mercados bursátiles internacionales.<sup>7</sup> Así, durante el primer periodo asumimos una situación de “calma” en los mercados internacionales, mientras que durante el segundo asumimos una de “inestabilidad”.

<sup>7</sup> En los días 9, 10 y 11 de agosto de 2007, por primera vez en la historia, se coordinaron los bancos centrales de los tres continentes para estabilizar la caída generalizada de los mercados bursátiles internacionales. Este hecho hizo explícita la escala global de la crisis financiera y económica que se manifestaría en los meses subsecuentes. Algunos análisis de esta crisis y sus efectos se encuentran en los trabajos de Ruiz (2010) y Stiglitz (2010). El primero se centra en el desenvolvimiento cronológico de la crisis global y en sus efectos sobre la economía mexicana. El segundo hace un análisis centrado en la economía, los mecanismos monetarios y financieros y la conducta de los intermediarios en Estados Unidos.

Desde la perspectiva estadística, el uso de los modelos ARCH asimétricos se justifica con base en las características de las series de rendimientos bursátiles mexicanos. Estas características incluyen curtosis altas (leptocúrticas), *clusters* de volatilidad, distribuciones no normales, asimetrías, volatilidades no constantes y movimientos conjuntos de la media y volatilidad entre distintos activos. Estas características se pueden detectar fácilmente por medio de estadísticas descriptivas tradicionales. Para efectos comparativos, hacemos la estadística descriptiva de las series de rendimientos considerando las series completas y divididas por periodos. Las tablas 1, 2 y 3 muestran dichas estadísticas descriptivas.

La tabla 1, integrada por seis columnas, muestra la estadística descriptiva de las series bursátiles considerando todo el periodo analizado (1,474 observaciones). La primera columna muestra el rendimiento diario promedio; la segunda, la desviación estándar de los rendimientos diarios (estimador estático de la volatilidad); la tercera, el coeficiente de asimetría, también conocido como sesgo. La cuarta columna muestra la curtosis o ancho de colas; la quinta el estimador Jarque-Bera, y la sexta el *p-value* asociado a dicho estimador. La hipótesis nula asociada a los estimadores Jarque-Bera es que los rendimientos se distribuyen normalmente.

En la tabla 1 se observa que todas las series de rendimientos bursátiles muestran curtosis leptocúrticas y son asimétricas en sus distribuciones, por lo que son no normales. En todos los casos las curtosis estimadas son mayores que 3. En 17 series hallamos que el sesgo es positivo y en 14, negativo. Por lo tanto, la evidencia sugiere que ninguna de las series se distribuye de manera simétrica. Este resultado se confirma mediante las pruebas de Jarque-Bera. De hecho, las mismas rechazan la hipótesis nula de normalidad en todos los casos. Así, el análisis, en principio, justifica la conveniencia de usar modelos de la familia ARCH para describir el comportamiento de los rendimientos bursátiles mexicanos.

**Tabla 1. Estadísticas descriptivas de los rendimientos de los activos para el periodo del 7 de diciembre de 2005 al 1 de agosto de 2011 y prueba de normalidad de Jarque-Bera**

<b>Activo bursátil</b>	<b>Media</b>	<b>Desv. Est.</b>	<b>Coef. Asim.</b>	<b>Curtosis</b>	<b>Jarque-Bera</b>	<b>P-value</b>
Alfa	0.0008	0.0232	0.5995	15.3499	9455.48	0.000
América Móvil	0.0005	0.0206	0.1651	8.8043	2075.84	0.000
Ara Consorcio	-0.0004	0.0249	-0.5309	22.5045	23433.61	0.000
Arca Continental	0.0010	0.0131	0.9363	10.5682	3733.20	0.000
Asureste	0.0006	0.0199	-0.0110	6.0422	568.43	0.000
Axtel	0.0000	0.0261	0.5217	11.0216	4018.77	0.000
Bimbo	0.0008	0.0191	0.2082	6.9193	954.06	0.000
Cemex	-0.0008	0.0315	0.1026	12.2184	5221.69	0.000
Comercial Mexicana	0.0002	0.0494	-15.8327	458.7354	12817500.96	0.000
Elektra Gpo	0.0015	0.0221	0.5115	10.4835	3503.79	0.000
Fomento Econ Mex	0.0010	0.0200	-0.2279	9.9465	2976.34	0.000
GCarso	0.0009	0.0250	0.7465	11.7636	4853.74	0.000
Geo Corporación	-0.0003	0.0286	-0.1569	8.5952	1928.76	0.000
GFBanorte	0.0006	0.0289	0.1275	15.6659	9856.70	0.000
GFINbursa	0.0009	0.0213	0.7583	11.0839	4154.80	0.000
GMexico	0.0013	0.0298	-0.2175	8.6720	1987.51	0.000
GModelo	0.0006	0.0189	-0.0098	6.2264	639.35	0.000
Gruma	-0.0001	0.0353	-10.4513	285.9615	4944294.85	0.000
Homex Desarr	0.0000	0.0291	-0.0528	15.3100	9307.49	0.000
Ica Soc Controlad	0.0001	0.0274	0.4896	26.4970	33967.61	0.000
Industrias Ch	0.0004	0.0209	-0.2377	7.9922	1544.49	0.000
Kimberly Clark Mex	0.0006	0.0177	0.2807	8.5359	1901.56	0.000
Mexichem	0.0018	0.0235	-0.2381	16.3150	10902.51	0.000
Peñoles Industrias	0.0015	0.0307	0.0095	7.9709	1517.62	0.000
Soriana Organización	0.0005	0.0213	-0.2412	7.4694	1241.14	0.000
Telefs de Mex	0.0004	0.0172	-0.1083	5.6819	444.62	0.000
Televisa Gpo	0.0002	0.0188	0.6482	8.5915	2023.39	0.000
TV Azteca	0.0005	0.0174	0.6157	7.7903	1502.42	0.000
Urbi Desarrollos	0.0000	0.0282	-0.4307	12.7667	5903.97	0.000
Wal Mart de México	0.0006	0.0191	0.0877	7.0962	1032.41	0.000
IPC	0.0005	0.0151	0.1961	8.6068	1940.14	0.000

La tabla 2 muestra la estadística descriptiva considerando el periodo del 6 de diciembre de 2005 al 9 de agosto de 2007 (437 observaciones). En ella, como en la tabla 1, se muestra que todas las series de rendimientos tienen curtosis leptocúrticas y son asimétricas en sus distribuciones, por lo que son no normales. En este contexto, cabe señalar que los rendimientos promedio estimados en la tabla 2 generalmente son mayores que los estimados en la tabla 1. Asimismo, las desviaciones estándar de los rendimientos son por lo general menores. Estos hechos sugieren la existencia de variaciones en las medias y varianzas de los activos bursátiles. Más aún, sugieren la existencia de *clusters* de volatilidad en las series.

**Tabla 2. Estadísticas descriptivas de los rendimientos de los activos para el periodo del 7 de diciembre de 2005 al 9 de agosto de 2007 y prueba de normalidad de Jarque-Bera**

Activo bursátil	Media	Desv. Est.	Coef. Asim.	Curtosis	Jarque-Bera	P-value
Alfa	0.0006	0.0165	-0.0831	4.5349	43.40	0.000
América Móvil	0.0017	0.0187	0.0018	4.3422	32.80	0.000
Ara Consorcio	0.0009	0.0194	-0.0509	4.7580	56.46	0.000
Arca Continental	0.0013	0.0133	0.2485	4.7937	63.08	0.000
Asureste	0.0012	0.0167	0.0747	5.5909	122.63	0.000
Axtel	0.0029	0.0185	1.0725	7.7286	490.90	0.000
Bimbo	0.0012	0.0166	0.1662	4.0097	20.58	0.000
Cemex	0.0006	0.0178	0.2542	4.5799	50.16	0.000
Comercial Mexicana	0.0015	0.0196	-0.1103	4.5438	44.28	0.000
Elektra Gpo	0.0019	0.0178	0.5883	5.4487	134.38	0.000
Fomento Econ Mex	0.0012	0.0160	-0.3290	5.1389	91.18	0.000
GCarso	0.0014	0.0192	0.3179	3.8686	21.10	0.000
Geo Corporación	0.0010	0.0212	0.0922	3.7537	10.96	0.004
GFBanorte	0.0017	0.0215	0.0453	4.5564	44.26	0.000
GFIInbursa	0.0013	0.0172	-0.4161	5.2055	101.18	0.000
GMexico	0.0027	0.0225	-0.0406	4.8726	63.97	0.000
GModelo	0.0013	0.0170	0.2249	4.7654	60.43	0.000
Gruma	0.0006	0.0178	-0.1043	4.9672	71.26	0.000
Homex Desarr	0.0014	0.0201	-0.1786	5.8623	151.50	0.000
Ica Soc Controlad	0.0024	0.0207	0.1343	4.5268	43.76	0.000

Continúa Tabla 2						
Activo bursátil	Media	Desv. Est.	Coef. Asim.	Curtosis	Jarque-Bera	P-value
Industrias Ch	0.0017	0.0185	-0.2309	5.4543	113.56	0.000
Kimberly Clark Mex	0.0005	0.0153	0.3671	4.6168	57.41	0.000
Mexichem	0.0025	0.0165	0.9335	9.0707	734.49	0.000
Peñoles Industrias	0.0019	0.0231	-0.1727	5.9539	161.05	0.000
Soriana Organización	0.0020	0.0184	0.1435	5.0146	75.40	0.000
Telefs de Mex	0.0010	0.0156	0.0085	3.7831	11.17	0.004
Televisa Gpo	0.0007	0.0157	0.1150	4.4771	40.69	0.000
TV Azteca	0.0007	0.0180	0.8691	8.8967	688.13	0.000
Urbi Desarrollos	0.0013	0.0216	0.0622	4.0992	22.28	0.000
Wal Mart de México	0.0007	0.0185	0.2962	4.9800	77.77	0.000
IPC	0.0012	0.0133	-0.1387	5.9767	162.74	0.000

La tabla 3 muestra la estadística descriptiva considerando el periodo del 10 de agosto de 2007 al 1 de agosto de 2011 (1,037 observaciones). En ella se confirma que todas las series de rendimientos muestran curtosis leptocúrticas y son asimétricas en sus distribuciones, por lo que son no normales. Nuevamente, los valores del rendimiento diario promedio y de la desviación estándar sugieren variaciones en las medias y en las varianzas de los activos. Sin embargo, cabe señalar que las variaciones tienen una dirección opuesta a las indicadas en la tabla 2. Este hecho confirma la existencia de movimientos conjuntos de las medias y varianzas de los activos, así como de *clusters* de volatilidad y volatilidades no constantes y asimétricas en las series.

Tabla 3. Estadísticas descriptivas de los rendimientos de los activos para el periodo del 10 de agosto de 2007 al 1 de agosto de 2011 y prueba de normalidad de Jarque-Bera						
Activo bursátil	Media	Desv. Est.	Coef. Asim.	Curtosis	Jarque-Bera	P-value
Alfa	0.0008	0.0255	0.6470	14.6115	5897.96	0.000
América Móvil	0.0000	0.0213	0.2268	9.8259	2022.07	0.000
Ara Consorcio	-0.0009	0.0268	-0.5643	23.0291	17388.62	0.000
Arca Continental	0.0009	0.0131	1.2376	13.1652	4729.53	0.000
Asureste	0.0004	0.0211	-0.0163	5.8611	353.74	0.000
Axtel	-0.0013	0.0287	0.5150	10.2764	2333.58	0.000

Continúa Tabla 3

Activo Bursátil	Media	Desv. Est.	Coef. Asim.	Curtosis	Jarque-Bera	P-value
Bimbo	0.0006	0.0201	0.2232	7.2776	799.22	0.000
Cemex	-0.0013	0.0357	0.1216	10.3854	2359.34	0.000
Comercial Mexicana	-0.0004	0.0576	-14.2445	354.7018	5379686.76	0.000
Elektra Gpo	0.0014	0.0236	0.4941	10.5761	2522.24	0.000
Fomento Econ Mex	0.0009	0.0215	-0.1982	9.9806	2112.26	0.000
GCarso	0.0007	0.0271	0.7985	11.7645	3429.33	0.000
Geo Corporación	-0.0009	0.0312	-0.1545	8.2876	1212.15	0.000
GFBanorte	0.0001	0.0315	0.1577	15.3696	6615.48	0.000
GFinbursa	0.0007	0.0228	0.9604	11.2894	3128.47	0.000
GMexico	0.0008	0.0324	-0.2082	8.3475	1243.05	0.000
GModelo	0.0003	0.0196	-0.0626	6.4481	514.41	0.000
Gruma	-0.0004	0.0404	-9.8378	234.9468	2341306.75	0.000
Homex Desarr	-0.0006	0.0322	-0.0030	14.2432	5461.93	0.000
Ica Soc Controlad	-0.0008	0.0298	0.5750	26.7842	24499.59	0.000
Industrias Ch	-0.0001	0.0219	-0.2168	8.3529	1246.21	0.000
Kimberly Clark Mex.	0.0007	0.0186	0.2530	9.0065	1569.95	0.000
Mexichem	0.0015	0.0259	-0.3336	15.1054	6351.07	0.000
Peñoles Industrias	0.0014	0.0334	0.0414	7.5121	879.98	0.000
Soriana Organizacio	-0.0001	0.0225	-0.2996	7.6694	957.59	0.000
Telefs. de Mex.	0.0001	0.0178	-0.1301	6.0515	405.26	0.000
Televisa Gpo	0.0000	0.0200	0.7568	8.9022	1604.17	0.000
TV Azteca	0.0003	0.0172	0.4913	7.2010	804.26	0.000
Urbi Desarrollos	-0.0005	0.0306	-0.4643	12.7044	4106.37	0.000
Wal Mart de México	0.0005	0.0194	0.0132	7.8013	996.11	0.000
IPC	0.0002	0.0157	0.2961	8.9917	1566.34	0.000

## Análisis econométrico

Los modelos TGARCH y EGARCH tienen una estructura similar para efectos de estimación econométrica. En ambos modelos las especificaciones de las medias requieren estimar los coeficientes  $\phi_{i0}$  y  $\phi_{i1}$ . Asimismo, para

las especificaciones de las varianzas se necesita estimar, además de los dos anteriores, los coeficientes  $\alpha_{i0}$ ,  $\alpha_{i1}$ ,  $\gamma_i$  y  $\beta_i$ . La significancia individual y los signos de los seis coeficientes estimados definen la conveniencia de usar cada modelo. Por comparabilidad, los rendimientos de cada activo se describen usando ambos modelos. Estas estimaciones econométricas están sintetizadas en las tablas 4 y 5. La comparación econométrica de los modelos se sintetiza en la tabla 6.

La tabla 4 muestra las estimaciones del modelo AR(1)-TGARCH(1,1) para las series completas de rendimientos bursátiles (del 7 de diciembre de 2005 al 1 de agosto de 2011). Estas estimaciones se sintetizan en seis pares de columnas. Cada par de columnas se refiere a las estimaciones relativas a un coeficiente determinado. Los primeros dos pares se refieren a los coeficientes  $\phi_{i0}$  y  $\phi_{i1}$ , respectivamente, los siguientes cuatro a los coeficientes  $\alpha_{i0}$ ,  $\alpha_{i1}$ ,  $\gamma_i$  y  $\beta_i$ . En cada par, la columna de la izquierda muestra los coeficientes estimados y la de la derecha muestra los *p-values* asociados a los estadísticos  $z$ , ajustados mediante los estimadores robustos de Bollerslev-Wooldridge.

La tabla 4 sugiere que hay efectos asimétricos significativos en 30 de las series de rendimientos con base en las estimaciones de los modelos AR(1)-TGARCH(1,1). Particularmente, en 29 series hay efectos apalancamiento  $\gamma_i > 0$ .<sup>8</sup> De hecho, las estimaciones asociadas a las especificaciones de las varianzas son satisfactorias en la mayoría de los casos. Los coeficientes  $\alpha_{i0}$ ,  $\alpha_{i1}$ ,  $\gamma_i$  y  $\beta_i$  son significativos y, en su gran mayoría, positivos para un total de 31, 34, 22 y 30 series, respectivamente.<sup>9</sup> Asimismo, los coeficientes  $\phi_{i0}$  y  $\phi_{i1}$  son significativos y positivos para un total de siete y 18 series, respectivamente. Estos hechos son consistentes con las predicciones teóricas del modelo TGARCH.

<sup>8</sup> Las excepciones se refieren a las acciones de Gruma y Peñoles Industrias. La evidencia sugiere que, para las acciones de Gruma, las malas noticias reducen la volatilidad  $\gamma_i < 0$ . En las acciones de Peñoles existe simetría  $\gamma_i = 0$ .

<sup>9</sup> El nivel de significancia considerado es 0.10.

**Tabla 4. Parámetros estimados y *p*-valores del modelo AR(1)-TGARCH(1,1) para el periodo del 7 de diciembre de 2005 al 1 de agosto de 2011. Los *p*-valores están asociados a estadísticos *t* ajustados mediante los estimadores robustos de Bollerslev-Woodridge.**

Activo bursátil	$\psi_0$		$\psi_1$		$\alpha_0$		$\alpha_1$		$\gamma$		$\beta$	
	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.
Alfa	0.0007	(0.1255)	0.0471	(0.1107)	4.50E-06	(4.86E-02)	0.0297	(0.0600)	0.0500	(0.0949)	0.9370	(0.0000)
América Móvil	0.0002	(0.5784)	0.0262	(0.3596)	9.56E-07	(2.38E-01)	0.0188	(0.0925)	0.0501	(0.0160)	0.9550	(0.0000)
Ara Consorcio	-0.0002	(0.7282)	0.0577	(0.0850)	6.62E-06	(2.22E-02)	0.0351	(0.0787)	0.0962	(0.0377)	0.9124	(0.0000)
Arca Continental	0.0007	(0.0103)	0.0521	(0.1484)	2.27E-05	(8.57E-04)	0.2445	(0.0008)	0.0789	(0.5124)	0.6368	(0.0000)
Asureste	0.0006	(0.2135)	0.0355	(0.2224)	2.70E-06	(1.06E-01)	0.0136	(0.2293)	0.0396	(0.0834)	0.9592	(0.0000)
Axtel	0.0004	(0.3814)	0.0882	(0.0052)	1.34E-05	(8.56E-02)	0.0315	(0.0313)	0.0841	(0.0745)	0.9084	(0.0000)
Bimbo	0.0007	(0.1043)	-0.0137	(0.6383)	7.56E-06	(4.93E-02)	0.0397	(0.0112)	0.0524	(0.0823)	0.9132	(0.0000)
Cemex	-0.0005	(0.3286)	0.0766	(0.0056)	7.05E-06	(3.32E-02)	0.0258	(0.0572)	0.0675	(0.0079)	0.9314	(0.0000)
Comercial Mexicana	0.0005	(0.3714)	0.0393	(0.2350)	4.94E-05	(2.22E-03)	0.1379	(0.0002)	0.2155	(0.0604)	0.7073	(0.0000)
Elektra Gpo	0.0012	(0.0066)	0.1773	(0.0000)	3.80E-06	(1.16E-01)	0.0722	(0.0000)	0.0269	(0.3409)	0.9163	(0.0000)
Fomento Econ Mex	0.0012	(0.0052)	0.0588	(0.1437)	1.32E-05	(3.74E-03)	0.0700	(0.0333)	0.0808	(0.1597)	0.8624	(0.0000)
GCairo	0.0011	(0.0634)	0.0030	(0.9306)	3.85E-05	(1.82E-02)	0.0680	(0.0781)	0.1119	(0.0413)	0.8159	(0.0000)
Geo Corporación	-0.0003	(0.5691)	0.1611	(0.0000)	1.42E-05	(1.02E-03)	0.0428	(0.0484)	0.1198	(0.0021)	0.8797	(0.0000)
GFBanorte	0.0003	(0.6244)	0.0656	(0.0360)	1.62E-05	(1.42E-03)	0.0605	(0.0083)	0.1280	(0.0153)	0.8575	(0.0000)
GFInbursa	0.0007	(0.1534)	-0.0290	(0.3424)	2.43E-06	(2.82E-01)	0.0034	(0.6557)	0.0454	(0.0324)	0.9702	(0.0000)
GMexico	0.0012	(0.0381)	0.0976	(0.0007)	1.57E-05	(1.36E-02)	0.0491	(0.0132)	0.0871	(0.0026)	0.8875	(0.0000)
GModelo	0.0005	(0.2138)	-0.0046	(0.8823)	1.35E-05	(2.35E-03)	0.0724	(0.0022)	0.0601	(0.1096)	0.8610	(0.0000)

**Continúa Tabla 4. Parámetros estimados y *p*-valores del modelo AR(1)-TGARCH(1,1) para el periodo del 7 de diciembre de 2005 al 1 de agosto de 2011. Los *p*-valores están asociados a estadísticos  $z$  ajustados mediante los estimadores robustos de Bollerslev-Woodridge.**

Activo bursátil	$\psi_0$		$\psi_1$		$\alpha_0$		$\alpha_1$		$\gamma$		$\beta$	
	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.
Gruma	0.0002	(0.7561)	0.1568	(0.0000)	2.50E-03	(1.28E-01)	0.1236	(0.2744)	-0.0698	(0.0000)	-0.4307	(0.3833)
Homex Desarr	-0.0001	(0.8021)	0.1024	(0.0007)	1.50E-05	(5.29E-03)	0.0277	(0.0995)	0.0960	(0.0053)	0.9024	(0.0000)
Ica Soc Controlad	0.0004	(0.4070)	0.0733	(0.0122)	1.21E-05	(7.39E-04)	0.1373	(0.1334)	0.0316	(0.7297)	0.8436	(0.0000)
Industrias Ch	0.0005	(0.2760)	0.1270	(0.0000)	1.29E-05	(5.71E-03)	0.0380	(0.0349)	0.0639	(0.0391)	0.8996	(0.0000)
Kimberly Clark Mex	0.0004	(0.2553)	0.0765	(0.0070)	5.64E-06	(1.81E-02)	0.0387	(0.0343)	0.0557	(0.0435)	0.9171	(0.0000)
Mexichem	0.0015	(0.0009)	0.1614	(0.0000)	1.92E-05	(4.85E-03)	0.0691	(0.0488)	0.1506	(0.0205)	0.8246	(0.0000)
Peñoles Industrias	0.0015	(0.0105)	0.1301	(0.0000)	1.15E-05	(2.04E-02)	0.0895	(0.0002)	-0.0034	(0.9189)	0.8988	(0.0000)
Soriana Organización	0.0007	(0.1545)	0.0587	(0.0641)	7.35E-06	(6.49E-03)	0.0647	(0.0032)	0.0492	(0.1007)	0.8980	(0.0000)
Telefs de Mex	0.0005	(0.1948)	0.0278	(0.3433)	5.86E-06	(1.45E-02)	0.0382	(0.0427)	0.0275	(0.2207)	0.9273	(0.0000)
Televisa Gpo	0.0001	(0.8545)	0.0372	(0.1682)	3.86E-06	(2.29E-02)	0.0003	(0.9680)	0.0657	(0.0005)	0.9578	(0.0000)
TV Azteca	0.0004	(0.2856)	0.0076	(0.8121)	1.16E-05	(1.27E-02)	0.0543	(0.0106)	0.0532	(0.2098)	0.8853	(0.0000)
Urbi Desarrollos	-0.0001	(0.8758)	0.0906	(0.0033)	5.64E-06	(1.45E-02)	0.0454	(0.0855)	0.0628	(0.0667)	0.9186	(0.0000)
Wal Mart de México	0.0002	(0.5501)	0.0592	(0.0386)	5.54E-06	(1.33E-02)	0.0218	(0.1520)	0.0814	(0.0041)	0.9224	(0.0000)
IPC	0.0003	(0.3652)	0.0874	(0.0009)	2.14E-06	(1.96E-02)	0.0083	(0.5745)	0.1352	(0.0000)	0.9147	(0.0000)

La tabla 5 sugiere que hay efectos asimétricos estadísticamente significativos en 18 de las series de rendimientos bursátiles con base en las estimaciones de los modelos AR(1)-EGARCH(1,1). En las 18 series hay efectos apalancamiento  $\gamma_i < 0$ . Nuevamente, las estimaciones de las especificaciones de las varianzas son satisfactorias. Los coeficientes  $\alpha_{i0}$ ,  $\alpha_{i1}$ ,  $\gamma_i$  y  $\beta_i$  son significativos para un total de 31, 30, 18 y 30 series. Asimismo, la gran mayoría de los coeficientes  $\alpha_{i0}$ ,  $\alpha_{i1}$  y  $\beta_i$  son positivos. Se debe señalar también que los coeficientes  $\phi_{i0}$  y  $\phi_{i1}$  son significativos y positivos para un total de ocho y 22 series. Estos hechos también son consistentes con las predicciones postuladas teóricamente.

La tabla 6 muestra y compara los estimadores de relativa bondad de ajuste de los modelos asimétricos ARCH analizados. Esta evaluación se hace comparando los valores absolutos de los estimadores *log-likelihood* y AIC asociados a cada modelo y serie de rendimientos bursátiles.<sup>10</sup> Particularmente, los resultados comparativos sugieren que el modelo EGARCH es el más adecuado para describir los rendimientos agregados del mercado bursátil mexicano (medido vía IPC). A nivel desagregado, los resultados sugieren que los modelos econométricos TGARCH y EGARCH son adecuados para ajustar los rendimientos bursátiles diarios de un total de 19 y 11 acciones, respectivamente.

<sup>10</sup>La bondad de ajuste de los modelos econométricos también puede evaluarse mediante los correlogramas de los residuales y de los residuales al cuadrado. Si los correlogramas muestran un comportamiento de ruido blanco, se dice que hay un buen ajuste. Si bien aquí reportamos los valores cuantitativos, debe recordarse que la estructura inicial de los modelos fue determinada mediante dichos correlogramas.

**Tabla 5. Parámetros estimados y p-values del modelo  $AR(1)-EGARCH(1,1)$  para el período del 7 de diciembre de 2005 al 1 de agosto de 2011.<sup>1</sup> Los p-values están asociados a estadísticos z ajustados mediante los estimadores robustos de Bollerslev-Woodbridge.**

Activo bursátil	$\psi_0$		$\psi_1$		$\alpha_0$		$\alpha_1$		$\gamma$		$\beta$	
	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.
Alfa	0.0007	(0.1100)	0.0684	(0.0249)	-2.56E-01	(1.12E-04)	0.1651	(0.0001)	-0.0412	(0.1172)	0.9828	(0.0000)
América Móvil	0.0001	(0.7488)	0.0219	(0.4265)	-1.34E-01	(2.69E-04)	0.1024	(0.0000)	-0.0522	(0.0037)	0.9927	(0.0000)
Ara Consorcio	-0.0006	(0.2562)	0.0656	(0.0351)	-2.53E-01	(3.15E-04)	0.1579	(0.0000)	-0.0788	(0.0166)	0.9814	(0.0000)
Arca Continental	0.0005	(0.0442)	0.0742	(0.0308)	-1.59E+00	(1.06E-03)	0.4187	(0.0000)	-0.0224	(0.6873)	0.8507	(0.0000)
Asureste	0.0005	(0.2296)	0.0401	(0.1779)	-8.68E-02	(3.95E-02)	0.0560	(0.0056)	-0.0443	(0.0139)	0.9944	(0.0000)
Axtel	0.0010	(0.1633)	0.0723	(0.0211)	-2.98E-01	(2.07E-02)	0.1512	(0.0000)	-0.0462	(0.1760)	0.9747	(0.0000)
Bimbo	0.0009	(0.0358)	-0.0234	(0.4236)	-2.85E-01	(1.22E-02)	0.1391	(0.0000)	-0.0343	(0.1308)	0.9774	(0.0000)
Cemex	-0.0005	(0.3695)	0.0834	(0.0018)	-1.42E-01	(2.12E-04)	0.1128	(0.0000)	-0.0537	(0.0029)	0.9922	(0.0000)
Comercial Mexicana	0.0002	(0.6807)	0.0784	(0.0184)	-5.97E-01	(5.99E-05)	0.3371	(0.0026)	-0.0992	(0.1647)	0.9521	(0.0000)
Elektra Gpo	0.0010	(0.0285)	0.1824	(0.0000)	-2.05E-01	(6.05E-02)	0.1519	(0.0000)	-0.0177	(0.3430)	0.9873	(0.0000)
Fomento Econ Mex	0.0012	(0.0078)	0.0452	(0.1984)	-2.65E-01	(2.04E-03)	0.1467	(0.0000)	-0.0441	(0.0654)	0.9800	(0.0000)
GCarso	0.0011	(0.0470)	0.0126	(0.7060)	-6.59E-01	(2.35E-02)	0.2311	(0.0002)	-0.0677	(0.0776)	0.9348	(0.0000)
Geo Corporación	-0.0004	(0.4466)	0.1648	(0.0000)	-2.75E-01	(2.02E-06)	0.1620	(0.0000)	-0.0846	(0.0005)	0.9795	(0.0000)
GFBanorte	0.0002	(0.7319)	0.0865	(0.0079)	-3.96E-01	(8.22E-07)	0.2449	(0.0000)	-0.0853	(0.0149)	0.9714	(0.0000)
GFmbursa	0.0007	(0.1471)	-0.0383	(0.2275)	-8.06E-02	(7.88E-02)	0.0519	(0.0003)	-0.0378	(0.1069)	0.9944	(0.0000)
GMexico	0.0013	(0.0351)	0.0941	(0.0010)	-2.65E-01	(9.88E-05)	0.1674	(0.0000)	-0.0523	(0.0059)	0.9811	(0.0000)
GModelo	0.0004	(0.3264)	-0.0169	(0.5869)	-2.37E-01	(3.50E-05)	0.1283	(0.0000)	-0.0412	(0.0442)	0.9822	(0.0000)

Continúa Tabla 5

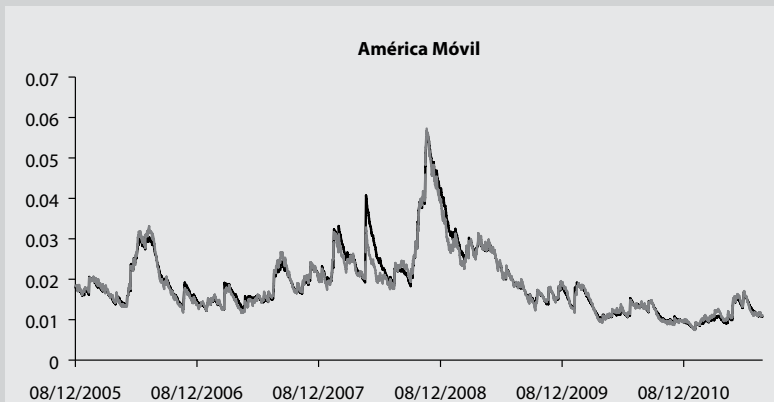
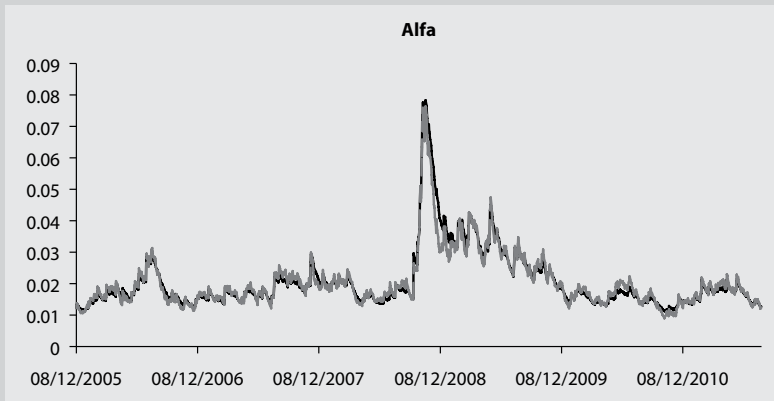
Activo bursátil	$\psi_0$		$\psi_1$		$\alpha_0$		$\alpha_1$		$\gamma$		$\beta$	
	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.
Gruma	-0.0014	(0.4914)	0.1886	(0.0001)	-9.51E+00	(1.81E-01)	0.1925	(0.5539)	0.0675	(0.6656)	-0.3956	(0.7349)
Homex Desar	-0.0003	(0.6074)	0.0927	(0.0019)	-2.45E-01	(3.08E-04)	0.1384	(0.0002)	-0.0670	(0.0232)	0.9807	(0.0000)
Ica Soc Controlad	0.0007	(0.1705)	0.0688	(0.0328)	-3.65E-01	(1.37E-05)	0.2623	(0.0000)	-0.0151	(0.7685)	0.9772	(0.0000)
Industrias Ch	0.0005	(0.3065)	0.1271	(0.0000)	-3.59E-01	(5.94E-04)	0.1476	(0.0000)	-0.0513	(0.0470)	0.9681	(0.0000)
Kimberly Clark Mex	0.0004	(0.3376)	0.0800	(0.0056)	-2.37E-01	(2.42E-03)	0.1222	(0.0001)	-0.0432	(0.0364)	0.9819	(0.0000)
Mexichem	0.0015	(0.0010)	0.1466	(0.0000)	-5.61E-01	(6.20E-03)	0.2712	(0.0001)	-0.0711	(0.1014)	0.9533	(0.0000)
Peñoles Industrias	0.0015	(0.0100)	0.1354	(0.0000)	-2.97E-01	(1.25E-05)	0.1930	(0.0000)	-0.0091	(0.7141)	0.9791	(0.0000)
Soriana Organización	0.0006	(0.1726)	0.0533	(0.0936)	-3.03E-01	(1.12E-03)	0.1791	(0.0000)	-0.0458	(0.0450)	0.9781	(0.0000)
Telefs de Mex	0.0005	(0.2207)	0.0271	(0.3629)	-2.44E-01	(2.25E-03)	0.1151	(0.0000)	-0.0275	(0.1313)	0.9808	(0.0000)
Televisa Gpo	0.0001	(0.8219)	0.0441	(0.0976)	-1.17E-01	(5.97E-04)	0.0562	(0.0580)	-0.0580	(0.0002)	0.9906	(0.0000)
TV Azteca	0.0004	(0.3057)	0.0040	(0.9036)	-6.35E-01	(4.93E-03)	0.2138	(0.0000)	-0.0111	(0.8065)	0.9412	(0.0000)
Urbi Desarrollos	-0.0001	(0.8310)	0.1000	(0.0009)	-2.14E-01	(1.22E-06)	0.1603	(0.0000)	-0.0476	(0.0560)	0.9874	(0.0000)
Wal Mart de México	0.0003	(0.5139)	0.0603	(0.0359)	-1.93E-01	(5.26E-04)	0.1095	(0.0000)	-0.0656	(0.0019)	0.9863	(0.0000)
IPC	0.0003	(0.3227)	0.0995	(0.0004)	-2.43E-01	(5.00E-04)	0.1407	(0.0000)	-0.1134	(0.0000)	0.9844	(0.0000)

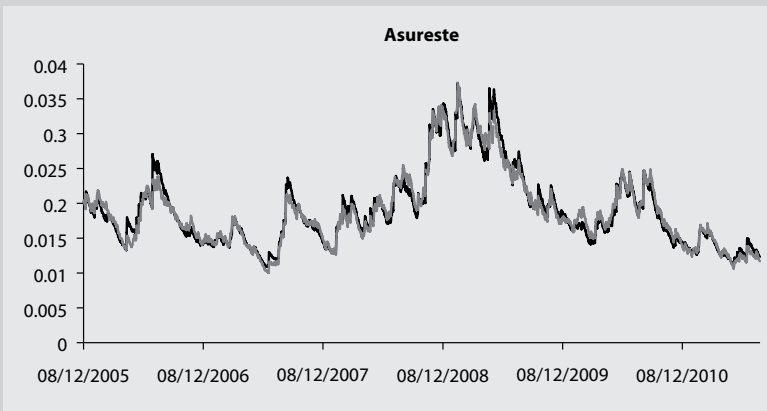
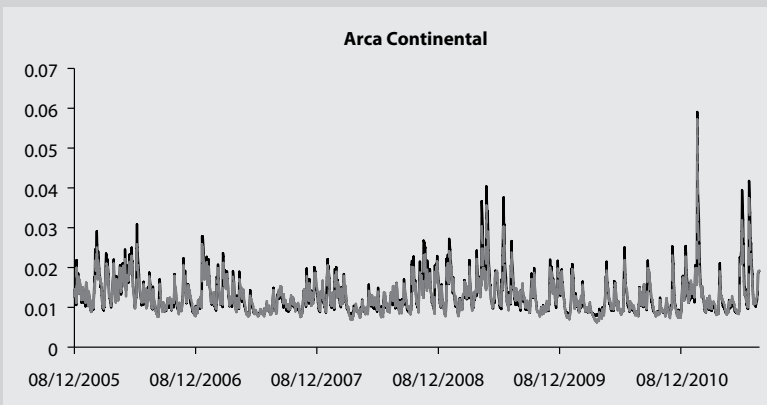
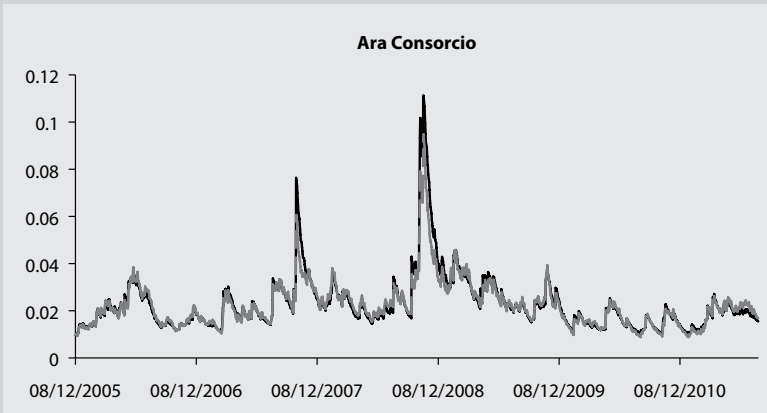
**Tabla 6. Estimadores de bondad de ajuste de los modelos AR(1)-TGARCH(1,1) y AR(1)-EGARCH(1,1). Uno y dos asteriscos denotan que el mejor ajuste se obtiene mediante los modelos TGARCH y EGARCH, respectivamente**

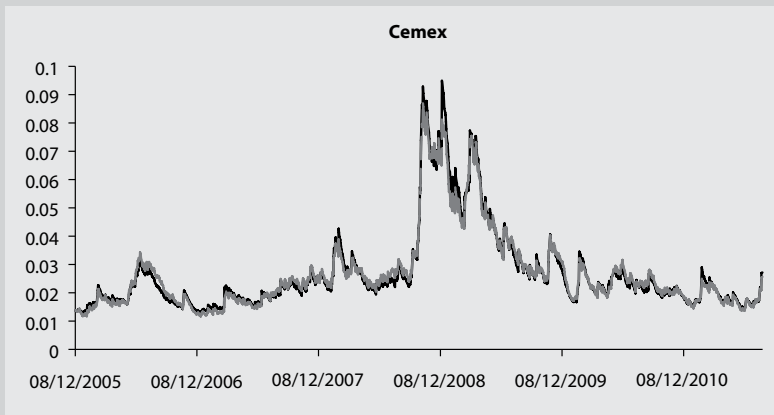
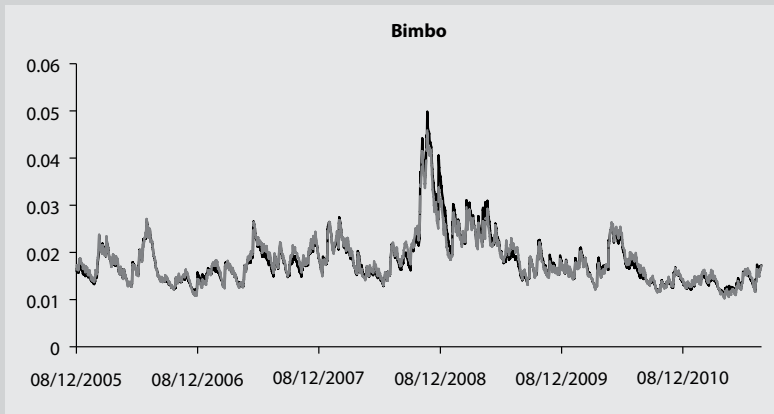
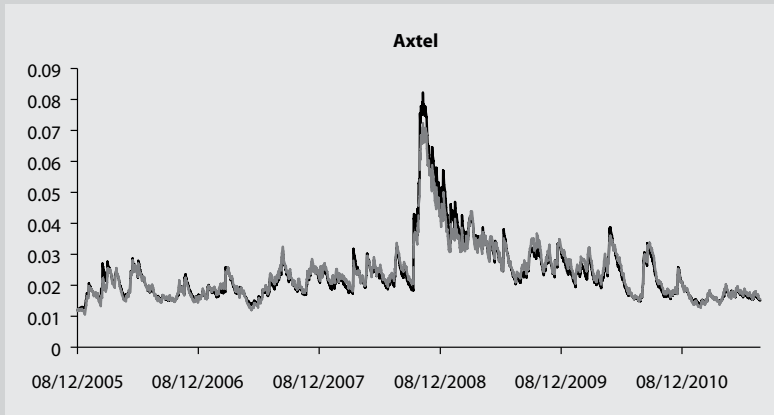
Activo bursátil	AR(1)-TGARCH(1,1)		AR(1)-EGARCH(1,1)		Bondad de ajuste
	Logl	Akaike	Logl	Akaike	
Alfa	3735.059	-5.0632	3728.987726	-5.0550	*
América Móvil	3854.695	-5.2257	3868.413684	-5.2443	**
Ara Consorcio	3612.327	-4.8966	3618.44388	-4.9049	**
Arca Continental	4389.021	-5.9511	4395.761224	-5.9603	**
Asureste	3797.345	-5.1478	3800.783325	-5.1525	**
Axtel	3507.29	-4.7540	3492.79951	-4.7343	*
Bimbo	3863.625	-5.2378	3857.853875	-5.2299	*
Cemex	3385.435	-4.5885	3385.688909	-4.5889	**
Comercial Mexicana	3510.821	-4.7588	3490.039215	-4.7305	*
Elektra Gpo	3724.135	-5.0484	3726.793768	-5.0520	**
Fomento Econ Mex	3842.12	-5.2086	3845.35187	-5.2130	**
GCarso	3496.539	-4.7394	3486.379569	-4.7256	*
Geo Corporación	3462.461	-4.6931	3457.100386	-4.6858	*
GFBanorte	3479.888	-4.7168	3470.491424	-4.7040	*
GfInbursa	3654.412	-4.9537	3653.311688	-4.9522	*
GMexico	3344.345	-4.5327	3338.301947	-4.5245	*
GModelo	3888.248	-5.2712	3881.00995	-5.2614	*
Gruma	2836.84	-3.8436	2882.418894	-3.9055	**
Homex Desarr	3437.777	-4.6596	3435.693991	-4.6567	*
Ica Soc Controlad	3573.616	-4.8440	3576.106406	-4.8474	**
Industrias Ch	3734.127	-5.0620	3726.958913	-5.0522	*
Kimberly Clark Mex	3987.703	-5.4063	3983.302398	-5.4003	*
Mexichem	3757.303	-5.0934	3745.49185	-5.0774	*
Penoles Industrias	3323.846	-4.5049	3321.214493	-4.5013	*
Soriana Organizacio	3722.758	-5.0465	3718.993993	-5.0414	*
Telefs de Mex	4004.349	-5.4289	4005.745211	-5.4307	**
Televisa Gpo	3896.574	-5.2825	3894.521275	-5.2797	*
TV Azteca	3970.182	-5.3825	3975.544385	-5.3897	**
Urbi Desarrollos	3453.438	-4.6808	3451.558204	-4.6783	*
Wal Mart de México	3897.549	-5.2838	3896.777111	-5.2828	*
IPC	4380.887	-5.9401	4382.044955	-5.9417	**

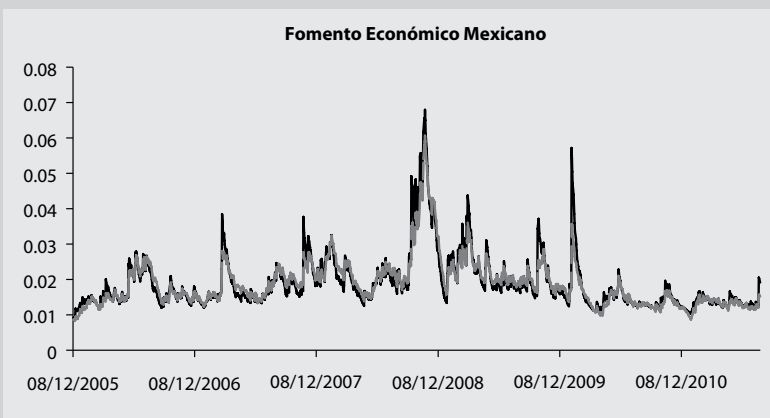
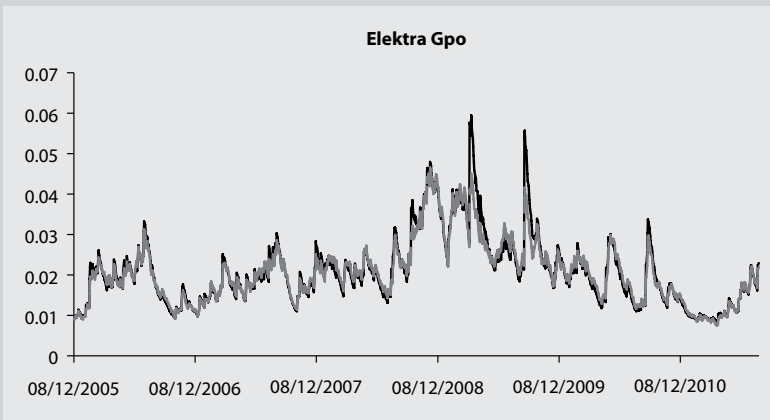
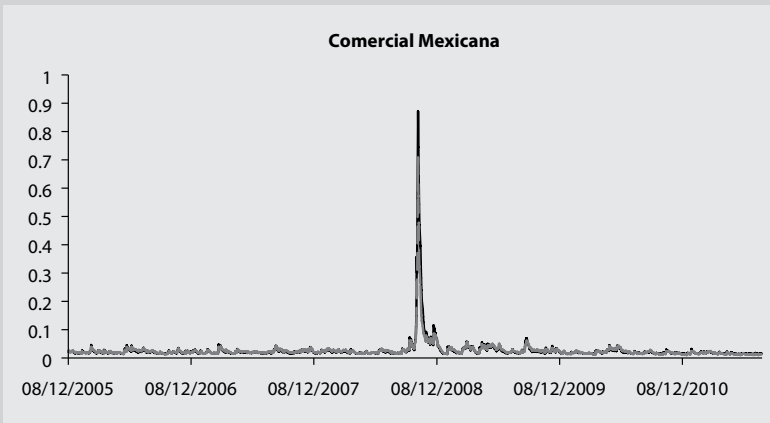
La bondad de ajuste de los modelos TGARCH y EGARCH puede visualizarse mediante el grupo de gráficas 1, el grupo de gráficas 2 y la gráfica 3. Los grupos de gráficas 1 y 2 muestran la bondad de ajuste de los dos modelos considerando las series de rendimientos de las acciones individuales, la gráfica 3 muestra la bondad de ajuste de los modelos para el mercado bursátil mexicano. En este contexto, los modelos muestran un comportamiento similar en lo que se refiere al comportamiento de las series de rendimientos. Asimismo, las gráficas confirman que los rendimientos de los activos mexicanos no fueron inmunes a la crisis global. Todas las series analizadas manifiestan comportamientos inestables desde mediados de 2007.

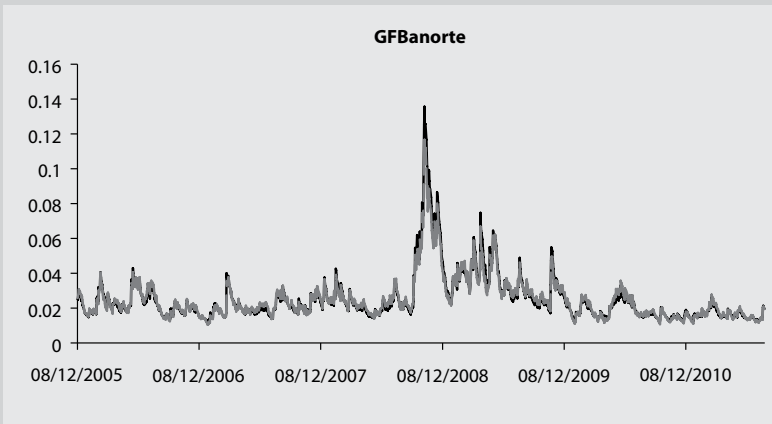
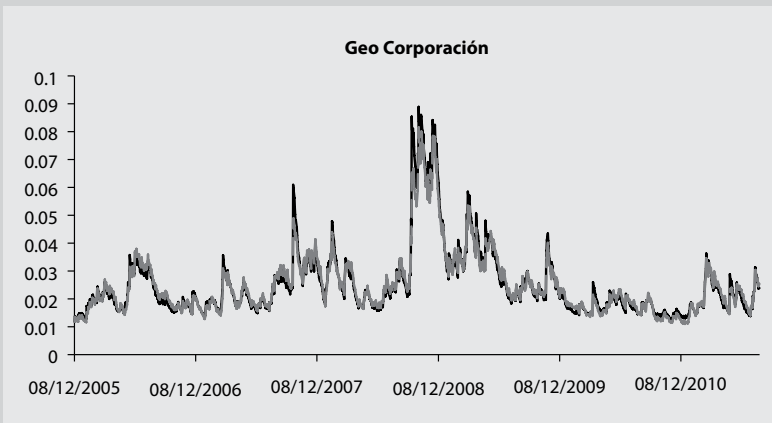
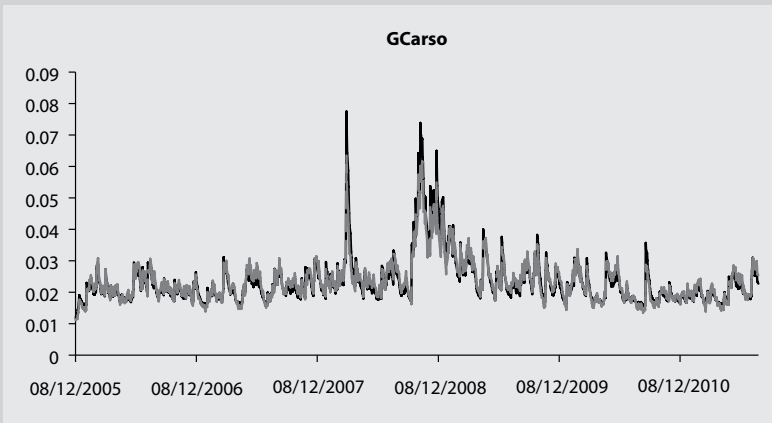
**Grupo de gráficas 1. Volatilidades estimadas del modelo TGARCH (negro) y del modelo EGARCH (gris)**

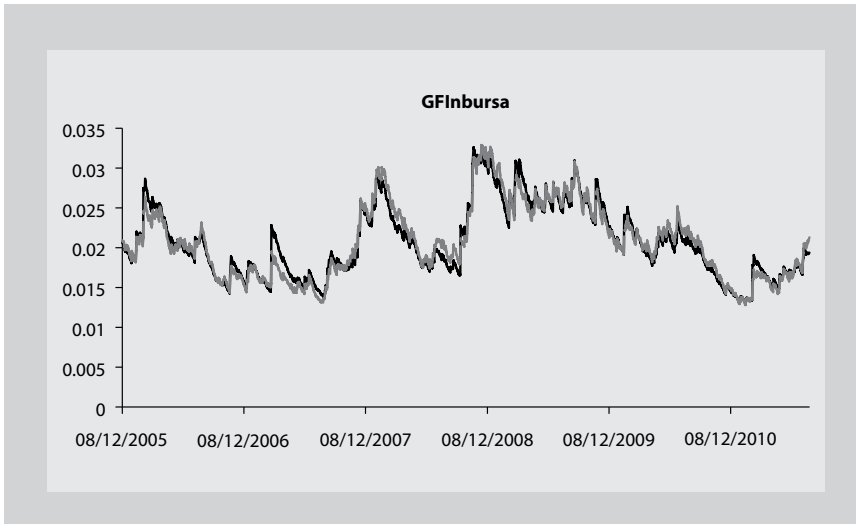




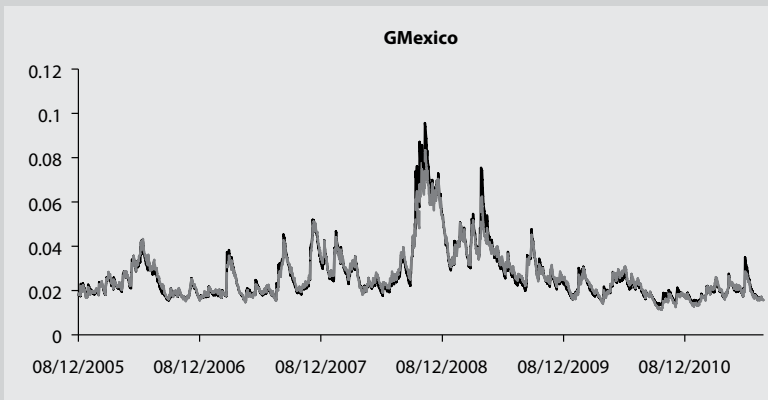


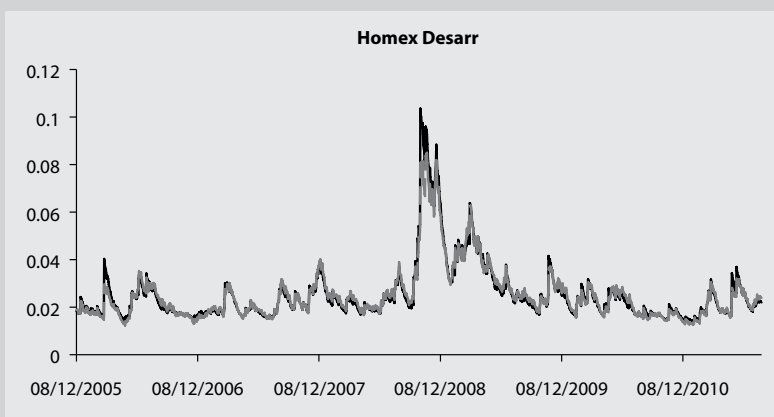
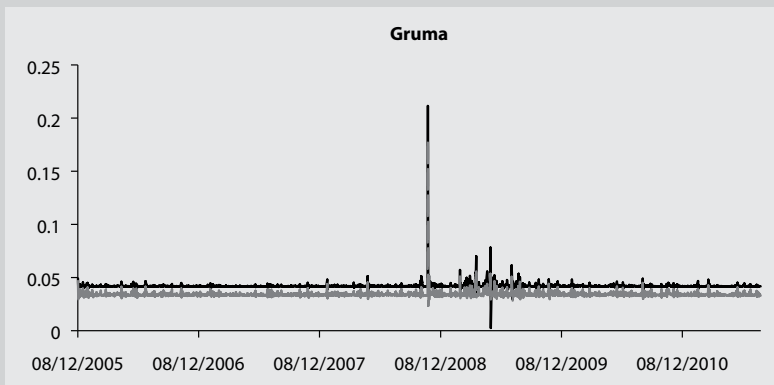
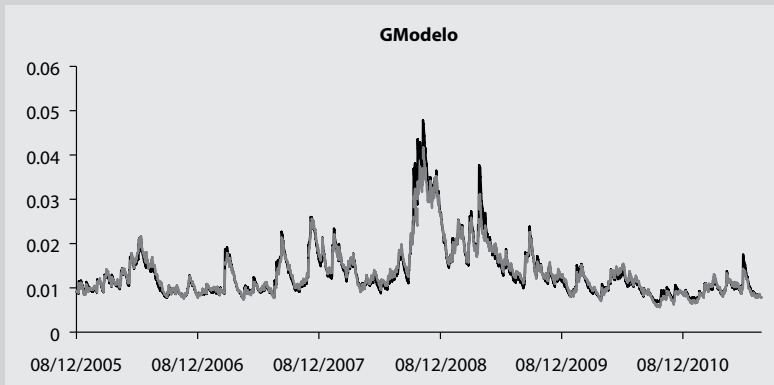


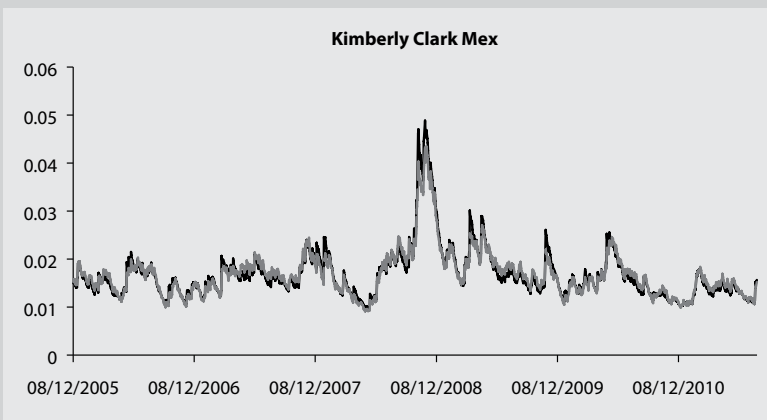
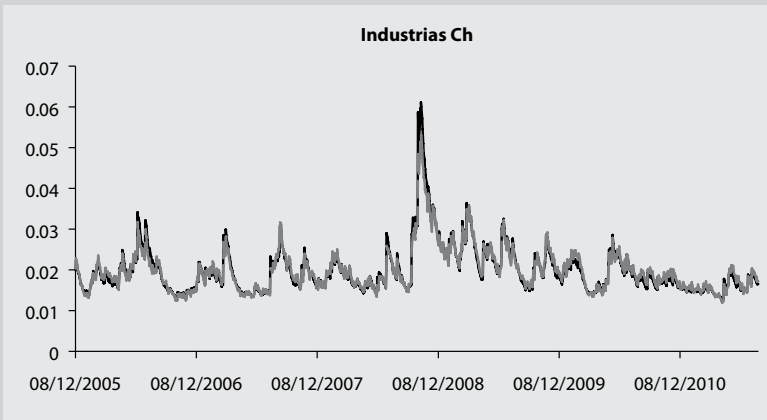
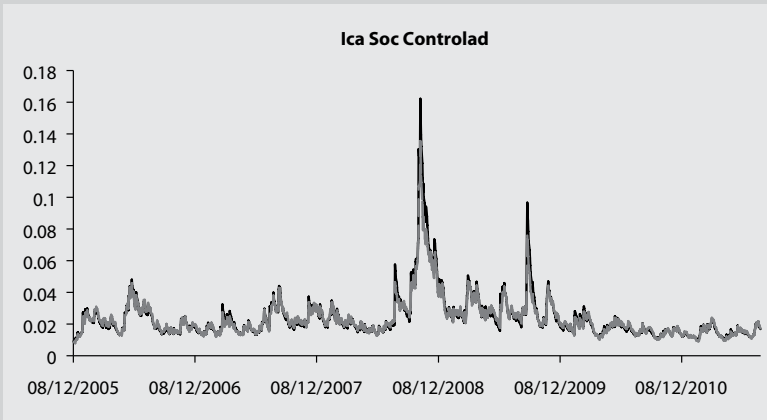


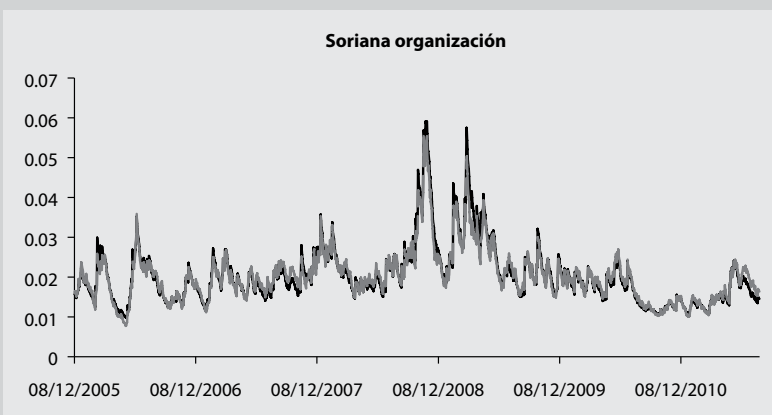
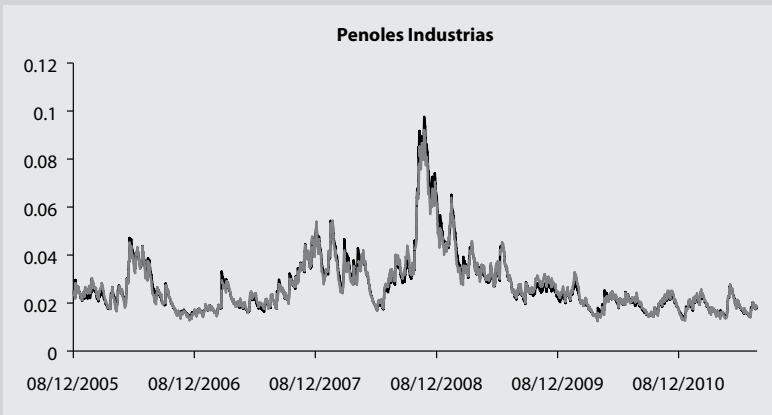
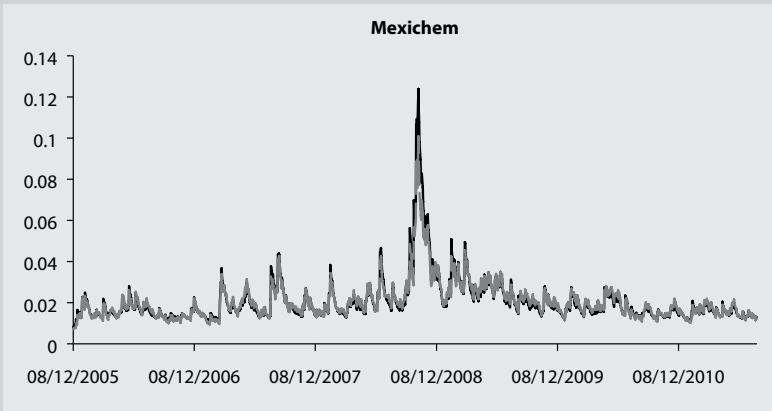


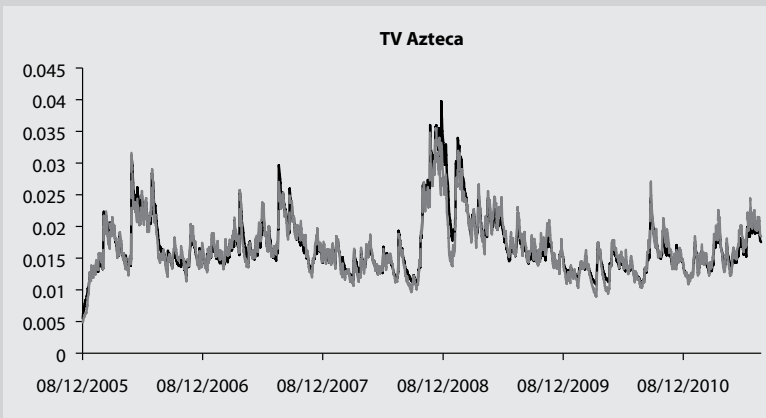
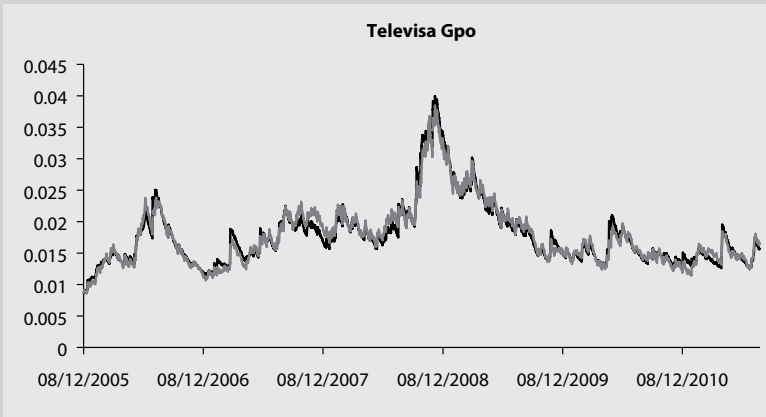
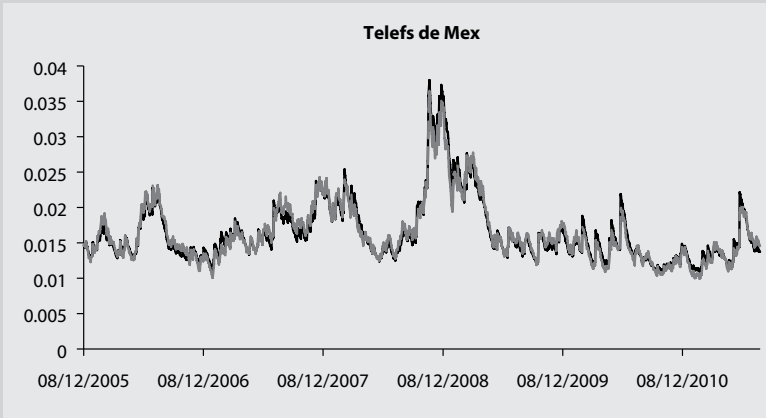
**Grupo de gráficas 2. Volatilidades estimadas del modelo TGARCH (negro) y del modelo EGARCH (gris)**

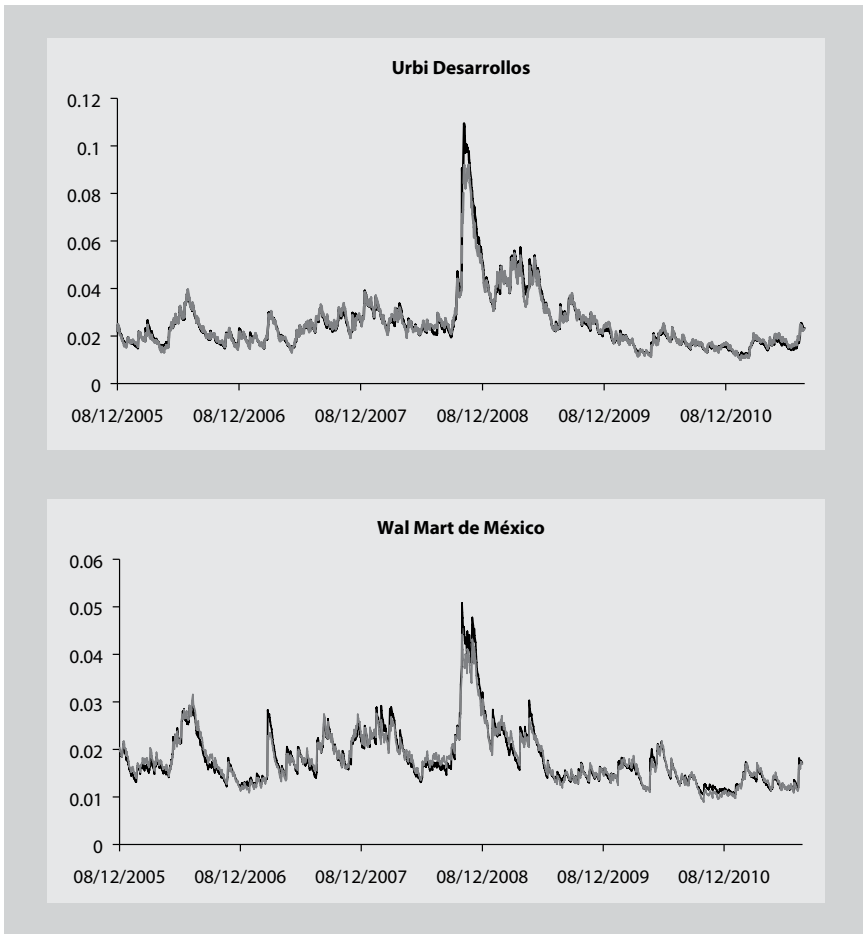






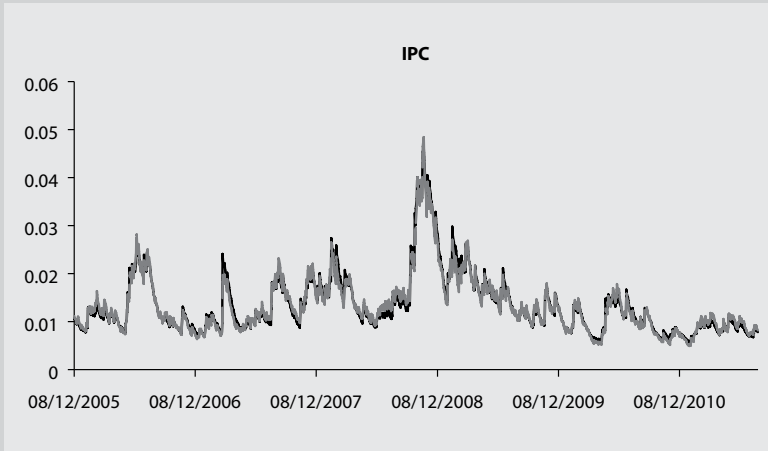






Finalizamos esta sección indicando que los resultados del ejercicio de modelación sugieren que hay efectos asimétricos significativos en los rendimientos bursátiles mexicanos. En la mayoría de las series encontramos efectos apalancamiento (las “malas noticias” tienen un impacto mayor que las “buenas”). Asimismo, los resultados comparativos sugieren que el modelo  $AR(1)$ -EGARCH(1,1) puede describir adecuadamente los rendimientos agregados del mercado bursátil. A nivel desagregado, los resultados muestran que los modelos  $AR(1)$ -TGARCH(1,1) y  $AR(1)$ -EGARCH(1,1) podrían describir adecuadamente el comportamiento de 19 y 11 series de rendimientos accionarios, respectivamente.

**Gráfica 3. Volatilidades estimadas del modelo TGARCH (negro) y del modelo EGARCH (gris) para el IPC**



## Conclusiones

En esta investigación hemos hecho un ejercicio comparativo de descripción econométrica de los rendimientos de los activos bursátiles mexicanos usando los modelos no lineales TGARCH y EGARCH. Hemos usado estos modelos para describir las series de rendimientos bursátiles a nivel desagregado (por acción) y agregado (considerando la totalidad del mercado). Para ello hemos modelado las series de rendimientos diarios de 30 acciones y del IPC durante el periodo comprendido entre el 7 de diciembre de 2005 y el 1 de agosto de 2011. Es particularmente interesante modelar este periodo porque abarca momentos de relativa calma y de inestabilidad en los mercados financieros internacionales.

Los resultados del análisis de estadística descriptiva justifican la conveniencia de describir las series de rendimientos bursátiles de los activos mexicanos usando modelos de la familia ARCH. Las series tienden a mostrar curtosis excesivas, *clusters* de volatilidad, asimetrías, distribuciones no normales, volatilidades no constantes y movimientos conjuntos de medias y

varianzas. Asimismo, el análisis comparativo muestra cambios en la estructura de los rendimientos. Los resultados sugieren que a partir de agosto de 2007 las medias de los mismos disminuyeron. Paralelamente, las varianzas aumentaron. Por lo tanto, la evidencia sugiere que la crisis global tuvo efectos negativos en el mercado bursátil mexicano.<sup>11</sup>

Los resultados del ejercicio de modelación econométrica sugieren que hay efectos asimétricos significativos en los rendimientos bursátiles mexicanos. En la mayoría de las series se encontraron efectos apalancamiento (las “malas noticias” tienen un impacto mayor que las “buenas”). Asimismo, los resultados comparativos sugieren que el modelo AR(1)-EGARCH(1,1) puede describir adecuadamente los rendimientos agregados del mercado bursátil (medidos vía IPC). A nivel desagregado, los resultados muestran que los modelos AR(1)-TGARCH(1,1) y AR(1)-EGARCH(1,1) podrían ajustar adecuadamente el comportamiento de 19 y 11 series de rendimientos accionarios, respectivamente.

Estos resultados tienen implicaciones econométricas y financieras. Desde la perspectiva econométrica, los resultados validan la conveniencia de usar modelos ARCH asimétricos para describir y pronosticar los rendimientos bursátiles. Por lo tanto los resultados podrían ser usados para justificar el uso extensivo de estos modelos. Desde la perspectiva financiera, los resultados confirman que la información tiene efectos asimétricos sobre los mercados financieros. Una implicación asociada es que eventos de carácter internacional, como las noticias asociadas a la crisis global, pueden inducir interdependencias, volatilidad e incluso la sincronización de los mercados y activos financieros internacionales.<sup>12</sup>

Finalizamos este trabajo indicando algunas líneas de investigación complementarias al mismo. Una primera se refiere a la evaluación de modelos asimétricos alternativos para efectos de modelar series financieras. Entre éstos, consideramos potencialmente relevantes los modelos PARCH (*power ARCH*) y ACGARCH (*asymmetric component GARCH*). Otra línea se refiere al uso de modelos GARCH multivariados para describir y predecir las variables

<sup>11</sup>La media de los rendimientos diarios del mercado bursátil mexicano (medido con base en el IPC) se redujo de 0.0012 a 0.0002 entre los periodos de calma e inestabilidad financiera global. La desviación estándar diaria se incrementó de 0.0133 a 0.0157 en el mismo lapso.

<sup>12</sup>Un trabajo teórico reciente en esta dirección es el de Breuss (2011), quien usa un modelo de *overshooting* para explicar la volatilidad de los activos bursátiles durante la crisis global.

financieras. Hasta donde sabemos, ninguno de estos modelos se ha usado para modelar los rendimientos bursátiles en México.<sup>13</sup> Creemos que la exploración de ambas líneas de investigación podría ser de gran utilidad en el contexto de los mercados emergentes.

## Bibliografía

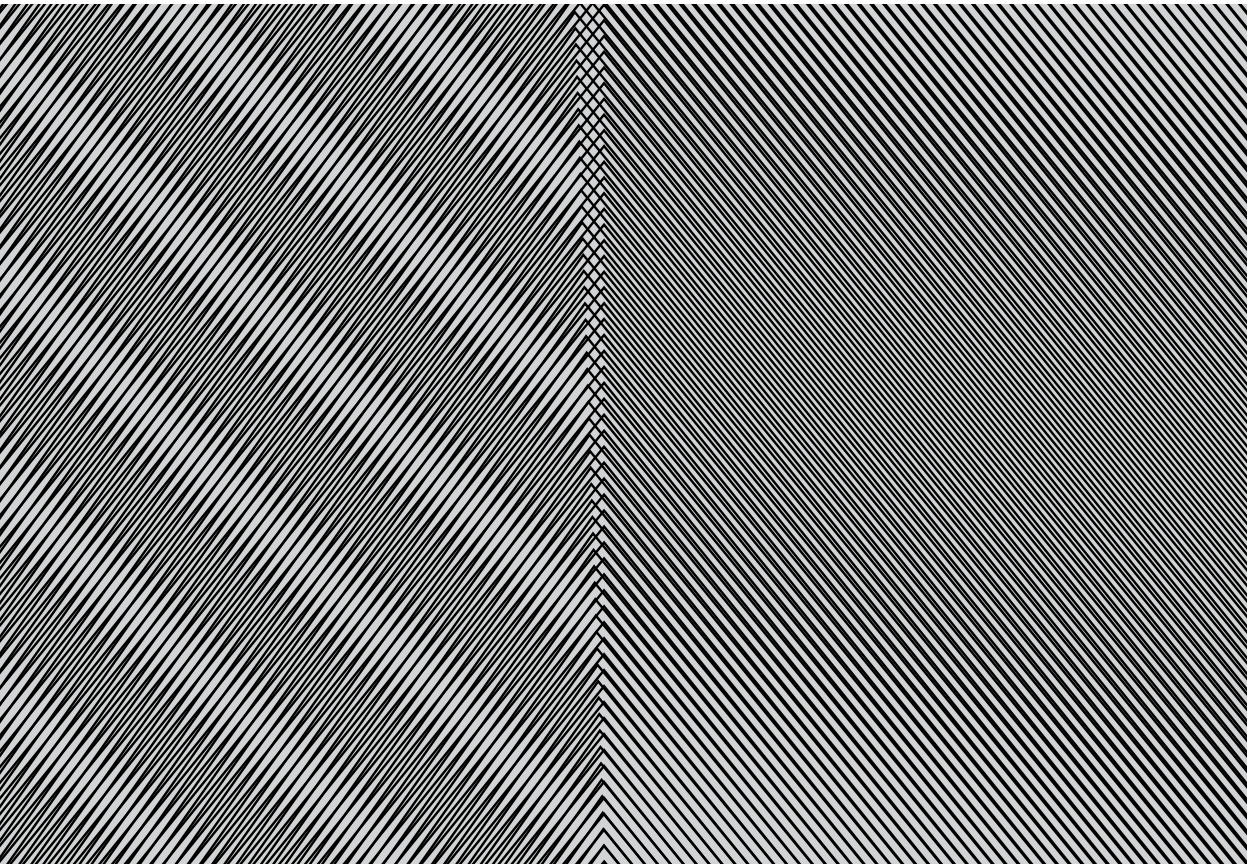
- Bauwens, L., Laurent, S. y Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: A survey. *JOURNAL OF APPLIED ECONOMETRICS*, 21(1), 79-109.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *JOURNAL OF ECONOMETRICS*, 31(3), 307-327.
- Bollerslev, T. (2010). Glossary to ARCH (GARCH). En Bollerslev, T., Russell, J. R. y Watson, M. W. (eds.), *VOLATILITY AND TIME SERIES ECONOMETRICS: ESSAYS IN HONOR OF ROBERT ENGLE*, 137-163. Oxford: Oxford University Press.
- Bollerslev, T. y Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances. *ECONOMETRIC REVIEWS*, 11(2), 143-172.
- Breuss, F. (2011). Global financial crisis as a phenomenon of stock market overshooting. *EMPIRICA*, 38(1), 131-152.
- Cermeño, R. y Solís, M. (2009). *IMPACTO DE NOTICIAS MACROECONÓMICAS EN EL MERCADO ACCIONARIO MEXICANO*. México: CIDE (Documento de Trabajo 471).
- Durán Vázquez, R., Lorenzo Valdés, A. y Ruiz Porras, A. (2011). Valuación de acciones mexicanas mediante los modelos de Ohlson & Ohlson-Beta para firmas con ciclos de corto y largo plazos: un análisis de cointegración. En López Herrera, F. y Ortiz Arango, F. (coords.), *AVANCES RECIENTES EN LA VALUACIÓN DE ACTIVOS Y ADMINISTRACIÓN DE RIESGOS*. Volumen 3. Mexico: Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Panamericana. Por publicarse.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *ECONOMETRICA*, 50(4), 987-1007. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/1912773>.
- Engle, R. F. (2004). Risk and volatility: Econometric models and financial practice. *AMERICAN ECONOMIC REVIEW*, 94(3), 405-420.

<sup>13</sup>Véase el trabajo de Bauwens *et al.* (2006), para una revisión y usos de los modelos GARCH multivariados.

- French, K. R., Schwert, G. W. y Stambaugh, R. F. (1987). Expected stock returns and volatility. *JOURNAL OF FINANCIAL ECONOMICS*, 19(1), 3-29.
- Guzmán Plata, M.P. (1998). Los modelos CAPM y ARCH-M: obtención de los coeficientes beta para una muestra de 33 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores. *ECONOMÍA, TEORÍA Y PRÁCTICA*, 9, 63-76.
- López Herrera, F. (2004). Modelado de la volatilidad y pronóstico del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. *CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN*, 213, 43-72.
- López Herrera, F. y Vázquez Téllez, F. J. (2002). Un modelo de la APT en la selección de portafolios accionarios en el mercado mexicano. *CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN*, 206, 9-30.
- Lorenzo Valdés, A. (2005). No linealidad en los mercados accionarios latinoamericanos. *ANÁLISIS ECONÓMICO*, 20(45), 63-74.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *JOURNAL OF FINANCE*, 7(1), 77-91. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/2975974>.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *ECONOMETRICA*, 59(2), 347-370. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/2938260>.
- Ruiz Porras, A. (2010). Globalización, ciclos económicos y crisis global, 2007-2010. *EXPRESIÓN ECONÓMICA*, 24, 43-61.
- Stiglitz, J. E. (2010). *FREEFALL, AMERICA, FREE MARKETS AND THE SINKING OF THE WORLD ECONOMY*. Nueva York: W.W. Norton and Company.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *REVIEW OF ECONOMIC STUDIES*, 25(2), 65-86. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/2296205>.
- Trejo, B., Núñez, J. A. y Lorenzo, A. (2006). Distribución de los rendimientos del mercado mexicano accionario. *ESTUDIOS ECONÓMICOS*, 21(1), 85-118. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/40311512>.
- Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *JOURNAL OF ECONOMIC DYNAMICS AND CONTROL*, 18(5), 931-955.

Francisco López Herrera  
División de Investigación de la Facultad de Contaduría y Administración de la  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Francisco Venegas Martínez  
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de  
Economía del Instituto Politécnico Nacional

# **Modelado de la volatilidad del mercado mundial de capitales durante la crisis financiera mundial mediante una cadena de Markov**



## Introducción

La crisis financiera, cuyas manifestaciones y consecuencias alcanzaron a los mercados financieros de todo el mundo, sin duda alguna desempeñó un papel protagónico en el estallido y desarrollo de la crisis económica que se desató a fines de la primera década del siglo XXI y cuyas secuelas siguen presentes. Por la envergadura y el profundo efecto que ha tenido este episodio de crisis, es considerado por muchos como equiparable a la profunda crisis del periodo conocido como la Gran Depresión, de los años treinta del siglo pasado; hay quienes se aventuran a considerar que los estragos que ha causado y los que están por verse en el futuro superan incluso a este antecedente, que parece ahora un tanto lejano en el tiempo pero al cual las crónicas describen como una etapa que fue muy difícil para todo el mundo.

A la crisis de los mercados financieros de Estados Unidos de 2007 se le reconoce, prácticamente de manera unánime, como uno de los factores preponderantes para explicar el estallido de la crisis económica generalizada que se observó a partir de 2008 en todo el mundo, pues se considera incluso que el disparo de la crisis financiera estadounidense contribuyó decisivamente a que se manifestara la crisis económica. Para muchos destaca de manera por demás sobresaliente el hecho de que la crisis financiera de Estados Unidos se extendió a los mercados financieros de otros países y que en varios de ellos exacerbó los efectos de los problemas por los que atravesaban sus economías debido a las diferentes presiones que venían enfrentando desde antes de la aparición de los problemas surgidos en sus sectores financieros a consecuencia de la pérdida de confianza que ocurrió debido a la caída de los mercados financieros estadounidenses.

La difusión de los efectos de la crisis incubada en los mercados financieros estadounidenses muy pronto alcanzó a los mercados financieros de diferentes países, como consecuencia natural del incremento constante y descomunal en la cuantía de los flujos de la inversión internacional de por-

tafolios en un contexto de alta circulación facilitada por la globalización financiera, ampliamente promovida por las políticas de liberalización y apertura de los mercados financieros en la mayoría de los países. También es evidente que los avances recientes en las tecnologías informáticas y en el diseño de productos novedosos para la inversión y la cobertura de riesgos han facilitado la movilización de gigantescos montos de capitales por los mercados financieros de todas las regiones del mundo, ya que entran y salen de cualquier país con gran facilidad. Asimismo, han surgido crisis locales que complican aún más la salida de la crisis general.

Este trabajo tiene como objetivo mostrar el análisis del comportamiento de la volatilidad del mercado mundial de capitales, efectuado mediante un modelo de volatilidad estocástica con cambios de régimen durante un periodo en el que ocurrieron varios episodios críticos, como la crisis financiera que se gestó en los mercados financieros de Estados Unidos y episodios de crisis que se han presentado en otros países. Para tales efectos, el trabajo se estructura en la forma que se enuncia a continuación.

En la sección siguiente se describen los antecedentes de la crisis financiera mundial y se destacan los elementos clave de su gestación. Después se describen los principales eventos que ocurrieron como consecuencia del estallido de la crisis, lo que permite poner en contexto el análisis cuyos resultados se muestran más adelante. Posteriormente se dedica una sección a la presentación de los elementos metodológicos en que se sustenta el análisis empírico de la volatilidad del mercado mundial de capitales. El elemento metodológico fundamental es el modelo de la volatilidad estocástica cuyo proceso está regido por una cadena de Markov con dos estados de volatilidad: alta y baja; los parámetros del modelo se estiman mediante la aplicación del filtro de Hamilton (1989). Luego se presenta una sección dedicada al análisis empírico de los resultados obtenidos mediante la aplicación del modelo descrito, y finaliza el trabajo con una sección en la que presentamos nuestras conclusiones.

---

## Antecedentes de la crisis mundial

Entre las causas que condujeron a la crisis económica mundial, cuyos efectos todavía se resienten, se pueden reconocer los efectos que de manera bastante

generalizada y mundial tuvo el incremento sostenido en los precios de muchas materias primas y que se observó en los mercados internacionales desde los primeros años del presente siglo. Por la gran importancia que tienen para las economías de todo el mundo, las alzas en los precios del petróleo son clave porque sigue siendo el energético fundamental para llevar a cabo y movilizar la producción industrial, así como el transporte de personas en diferentes modalidades. Más de una tercera parte del consumo mundial de energía se basa en el consumo del petróleo, que también es importante para extraer carbón y gas para obtener energía. Desde las crisis petroleras que se observaron a mediados de la década de los sesenta y a principios de los setenta del siglo xx, es de sobra conocido el efecto negativo que pueden tener las alzas en los precios del petróleo sobre el funcionamiento de la economía mundial. Después de una relativa calma, a partir de 2000 se empezó a ver una escalada en los precios que duró varios años hasta que, a inicios de 2008, el barril de petróleo alcanzó el máximo histórico de 100 dólares. La carrera ascendente de la cotización internacional del barril no se detuvo y llegó a superar los 147 dólares en julio del mismo año.

Pero no sólo el precio del petróleo tuvo un alza enorme, también otros productos alcanzaron precios récord en 2008. Entre ellos están metales preciosos como oro, platino y plata, y otros de amplio uso industrial como cobre o paladio. Asimismo, durante 2007 y 2008 se observaron fuertes incrementos a nivel mundial en los precios de los alimentos, lo que produjo una crisis alimentaria en las regiones más pobres del mundo. Los países del continente africano, con problemas crónicos para alimentar a sus habitantes, se encuentran entre los más afectados por la crisis alimentaria. Pero no sólo los países africanos se vieron en una situación complicada, otros países menos pobres enfrentaron situaciones difíciles caracterizadas por tensiones políticas y sociales debido a la carestía que enfrentaron principalmente las capas sociales más pobres. El encarecimiento y la oferta insuficiente de alimentos se atribuyen en parte a las malas cosechas, lo cual puede verse únicamente como un hecho coyuntural. Otro factor que afectó la oferta e incidió notablemente en el alza de los precios de los alimentos es el desplazamiento de la producción de maíz, principalmente en Estados Unidos, a la producción de biocombustibles. Este cambio en el uso del maíz puede verse como un problema de carácter estructural, pues seguramente continuará presente en el futuro inmediato ya que su origen se encuentra en el deseo

de los productores de alcanzar un nivel de rentabilidad más alto. De igual manera, buena parte de la producción de cereales se ha desplazado del consumo humano directo a la producción de alimentos procesados para el ganado, lo que tiene un efecto particularmente negativo para la oferta destinada al consumo humano, pues se requieren hasta siete kilogramos de cereal para obtener un kilogramo de carne.

A partir de 1997, en las bolsas de valores del hemisferio occidental se empezó a observar un proceso caracterizado por un rápido aumento de su valor, sustentado básicamente en el vigoroso y pujante crecimiento del valor de los activos emitidos por las empresas tecnológicas vinculadas al naciente sector de actividades que aprovechaban el desarrollo pujante de la internet y que operaban por medio de “portales” o sitios *web*. Se trataba generalmente de empresas de nueva creación, consideradas entonces como el prototipo de los modelos de negocios de la llamada “nueva economía”, es decir, empresas que se suponía se separaban del modelo convencional de los negocios. Las actividades de estas empresas de nuevo cuño se fundamentaban en la información y el conocimiento como base de la producción, productividad y competitividad a escala global. El empuje sostenido en el crecimiento de las cotizaciones bursátiles prosiguió hasta 2001, cuando estalló la “burbuja punto com”, llamada así porque empezaron a observarse quiebras, fusiones, adquisiciones y despidos de personal en las denominadas empresas punto com, lo cual ocasionó que algunas voces señalaran que en realidad nunca había existido la “nueva economía” sino que detrás de la pujanza mostrada por los precios de los títulos de tales empresas sólo se encontraba el oportunismo de quienes especularon con el objetivo de obtener grandes ganancias. Es del dominio público que más de 4,800 empresas de internet se vieron forzadas a desaparecer entre 2000 y 2003, lo que naturalmente modificó las expectativas sobre la posibilidad de sostener el crecimiento del valor de los activos de las empresas que sobrevivieron al deterioro de las expectativas debido a la pérdida de confianza entre los inversionistas. El final del periodo de fuerte incremento en los precios de las empresas punto com se presentó como un proceso de magnitud semejante, pero con dirección opuesta, que llevó a una estrepitosa caída de los precios de las acciones de las empresas tecnológicas. El desplome que sufrió el índice Nasdaq muestra claramente el deterioro de las expectativas y los efectos de éstas sobre la valuación de los activos vinculados a las empresas punto com, pues bajaron de un nivel

máximo de 5,132.52 puntos alcanzado el 10 de marzo de 2000 a menos de 3,500 puntos a mediados del mismo año. La caída de las cotizaciones bursátiles de dichas empresas no se contuvo, prosiguió y en su contracción llevó este índice bursátil al nivel de sólo 1,300 puntos en octubre de 2002, comparable a los niveles que se habían alcanzado en 1996.

Conforme se fue observando el colapso de la burbuja de empresas punto com, una parte sustancial de los enormes capitales que abandonaron la inversión en ellas fue atraída por el mercado de activos inmobiliarios, que representaban una mejor oportunidad de rentabilidad debido al crecimiento que se venía observando en los precios de los inmuebles en los países altamente industrializados. El crecimiento en los precios de los activos inmobiliarios era incluso superior al crecimiento en los niveles generales de precios en las economías de esos países, por lo que además de rentables se podía pensar que las inversiones en bienes inmuebles eran de un nivel de riesgo relativamente bajo. La liquidez propiciada por este desplazamiento de los cuantiosos recursos financieros disponibles que huían del mercado de los activos de las empresas punto com impulsó, junto con otros factores, la inusitada expansión que se observó en el mercado estadounidense de inmuebles. De acuerdo con el Índice de Precios de Vivienda S&P/Case-Shiller, el precio de viviendas unifamiliares en Estados Unidos tuvo un incremento de 85.68% entre 2000 y 2005.

Entre los factores que fomentaron el fuerte crecimiento del mercado de bienes raíces en Estados Unidos se encuentran las notables bajas en las tasas de interés con que la Reserva Federal trataba de incentivar la recuperación económica por medio de la reactivación del consumo y el incremento en la inversión canalizada a actividades productivas. Si bien se observaba un alto grado de inestabilidad económica después de los atentados del 11 de septiembre de 2001, las economías estadounidense, europea y japonesa mostraban desde el año 2000 señales indubitables de un estado de recesión. Como consecuencia de lo anterior, desde fines del mismo año la Reserva Federal decidió hacer recortes en la tasa de interés sobre los fondos federales que provocaron un descenso gradual que en unos años la hizo descender de 6.5% a 1%. Cabe destacar que, paralelamente, la tasa fija para las hipotecas a 30 años descendió en ese periodo de 8% a 5.5% (Federal Reserve Board, 2008). Las bajas en las tasas de interés ocasionaron un notable crecimiento en la demanda de créditos hipotecarios, como respuesta lógica a la oferta

de créditos baratos que estaban dispuestos a conceder los bancos estadounidenses. Este proceso inyectó bríos a la expansión del mercado inmobiliario, que representaba una buena oportunidad de negocios para los bancos. Sin embargo, para explicar el enorme crecimiento de los créditos hipotecarios observado en Estados Unidos durante el periodo de referencia, y en particular los llamados créditos *subprime*, es necesario tomar en cuenta otros aspectos que influyeron en la liberalidad con que se proporcionaron a los particulares los préstamos que solicitaban para la adquisición de bienes inmuebles. Uno de ellos es el carácter forzoso de la concesión de créditos hipotecarios incluso a personas cuyo historial crediticio no es bueno, como lo exige la legislación estadounidense mediante la *Community Reinvestment Act*, con el fin de dar facilidades para que el mayor número posible de familias tuvieran acceso a la vivienda, con bajo costo para las de menores ingresos.

La oferta de créditos hipotecarios de los bancos era incentivada tanto por la posibilidad de obtener jugosas ganancias como por los requerimientos que la ley establecía para su funcionamiento. En última instancia, por ambas razones los bancos crearon opciones novedosas de crédito mediante las cuales se extendió un enorme número de préstamos hipotecarios. Gran cantidad de tales créditos se otorgaron a clientes cuya calidad crediticia era calificada no como dudosa, sino como totalmente mala, pero que fueron capaces de obtener créditos hipotecarios pues, en lo que parecía un gran afán por conceder la mayor cantidad de créditos posible, los bancos llegaron prácticamente a eliminar muchos requisitos básicos para otorgar este tipo de créditos. Una proporción importante de los concedidos en forma por demás laxa pasó a formar parte de lo que se conoce como la cartera de créditos *subprime*, que se encontraba originalmente en manos de los bancos estadounidenses.

Es de destacar que en los créditos concedidos por la banca estadounidense se encontraba implícito un nivel de riesgo muy alto para los bancos prestamistas, pero esto no parecía importarles, pues a pesar del riesgo latente no sólo dieron créditos a todo tipo de clientes, incluyendo inmigrantes indocumentados, sino que incluso empezaron a conceder segundas hipotecas utilizando como garantía colateral la casa adquirida mediante la primera hipoteca, dado que su valor había aumentado en comparación con el momento en que se había adquirido. Parte de las segundas hipotecas

se utilizó para refinanciar primeras hipotecas, tratando de aprovechar las tasas de interés más bajas, pero otra parte de los recursos los destinaron los prestatarios a la compra de bienes de consumo. Por otra parte, se sabe que los créditos otorgados no se canalizaron siempre a la compra de casas para usarlas como viviendas, sino que en muchas ocasiones se adquirirían únicamente como un vehículo de inversión patrimonial y, en otros casos, tan sólo para usarlas como casas de descanso vacacional; se estima que el 40% de los créditos hipotecarios concedidos tuvieron como destino final estos usos diferentes al de vivienda.

Pronto la onda expansiva de la burbuja inmobiliaria llegó a los mercados de capitales, lo cual condujo a que éstos también jugaran un papel muy importante como vehículos para la expansión del crédito destinado a las hipotecas. En 2007, la cantidad total de títulos en circulación que se habían emitido con garantías hipotecarias alcanzaba un valor de mercado superior a los siete billones de dólares, es decir, se tenía un crecimiento implícito de tres veces el valor alcanzado por ese tipo de títulos en 1996. La participación de inversionistas institucionales como fondos de inversión, aseguradoras, fondos de pensiones y agencias gubernamentales, entre otras instituciones financieras de intermediación bursátil, fue un elemento fundamental para el enorme crecimiento del mercado de los títulos respaldados por hipotecas. De 2004 a 2007, estos participantes en el mercado emitieron grandes cantidades de títulos de deuda garantizados por hipotecas cuyo monto ascendió a sumas monetarias cuantiosas, entre ellos los llamados MBS (*mortgage-based securities*) y CDO (*collateralized debt obligations*). Algunos de los nuevos instrumentos para movilizar los créditos hipotecarios eran títulos en forma de bonos convencionales, otros eran instrumentos más complejos, derivados que se reconocen como parte de la clase denominada de productos estructurados cuya valuación es mucho más compleja que la de los instrumentos convencionales.

En consecuencia, mediante la bursatilización de créditos hipotecarios se incrementó notoriamente la disponibilidad de fondos frescos para los bancos, que ahora no debían esperar que las hipotecas vencieran para recuperar totalmente las inversiones efectuadas, sino que podían otorgar nuevos créditos, con lo que obtenían los ingresos adicionales provenientes de las comisiones que podían obtener mediante la gestión y administración de los mismos créditos. El traspaso de la propiedad de las hipotecas utilizando

como vehículo el mercado de valores resultaba muy conveniente para los bancos que eran los tenedores originales de las hipotecas pues, junto con las ventajas que la liquidez les proporcionaba, podían retirar de sus hojas de balance los créditos hipotecarios (tanto buenos como malos), los que eran empaquetados y se trasladaban a mercados financieros locales y de otros países.

Es evidente que la bursatilización de los títulos garantizados por hipotecas creó un incentivo adicional para que los bancos pusieran énfasis en el procesamiento de las solicitudes de crédito hipotecario. Sin embargo, la mayor actividad de los bancos no fue acompañada por una mejor supervisión de la calidad crediticia de los solicitantes ni por el incremento en los requisitos que debían cumplir para tener acceso al crédito. Por lo tanto, se incrementó la proporción de créditos concedidos a solicitantes de la clase *subprime* respecto a los que se bursatizaron, ya que este tipo de créditos se podía empaquetar sin problema alguno. De acuerdo con Demyanyk y Van Hemert (2008), en 2001 los títulos relacionados con créditos *subprime* representaban el 54% del total de los títulos garantizados mediante hipotecas que se encontraban en circulación, y en 2006 había crecido dicha proporción al 75%. Al respecto, Gorton (2008) señala que las hipotecas de clientes *subprime* emitidas entre 2005 y 2006 rondaban los mil doscientos millones de dólares, de los cuales el 80% se bursatizó. Según el reporte de la Comisión Investigadora de la Crisis Financiera (*Financial Crisis Inquiry Commission*) publicado en enero de 2011, el enorme crecimiento de la oferta bursátil de títulos relacionados con créditos hipotecarios también se vio impulsado fuertemente por la disponibilidad de instrumentos de cobertura. Estos instrumentos, los derivados financieros conocidos como *credit default swaps*, estaban diseñados para proteger a los inversionistas del riesgo de incumplimiento inherente al título negociado en bolsa con el respaldo de las hipotecas, razón por la cual también alimentaron la burbuja especulativa nacida en el mercado inmobiliario estadounidense, pues generaban confianza en los inversionistas. Otro factor que influyó de manera muy importante para que el mercado de títulos respaldados por hipotecas tuviera un crecimiento exorbitante fue el otorgamiento de calificación de grado de inversión por prestigiosas agencias calificadoras a instrumentos que se negociaban en el mercado de valores con base en las hipotecas calificadas como *subprime*. En forma por demás obvia, tales calificaciones

facilitaban la venta de todo este tipo de títulos a los inversionistas, incluyendo aquellos por cuya baja calidad de las garantías no correspondían al grado de calificación otorgado a los paquetes emitidos por los bancos. Otro efecto negativo de estas calificaciones fue su contribución al incremento de los precios de los bienes inmuebles en general.

Otro elemento que debe considerarse es la reforma en materia de regulación bancaria que se llevó a cabo en Estados Unidos; al amparo de la nueva legislación, ocurrió una metamorfosis completa del sistema bancario de ese país. Gorton (2008) señala que al nuevo sistema bancario estadounidense se le puede considerar como un sistema bancario sombra, pues se le puede caracterizar como un mundo en el que prevalecen las operaciones de instrumentos derivados que, como otras transacciones, no se registran directamente en las hojas del balance contable de los bancos. En materia de créditos hipotecarios, se modificó el esquema tradicional según el cual el banco extendía el crédito al prestatario y se quedaba con el riesgo de que éste no cumpliera las obligaciones contraídas al obtenerlo. La falta de regulación de las actividades bancarias permitió que los bancos esparcieran el riesgo de los créditos por medio de los mercados de valores, el que pasó a los inversionistas deseosos de obtener los rendimientos de los valores que emitían los bancos y mediante los cuales empaquetaron, sin distingo alguno, todo tipo de créditos hipotecarios.

La exposición de los bancos e inversionistas al riesgo de incumplimiento de los acreditados estadounidenses era muy grande; naturalmente, en gran parte debido a que una proporción sustantiva de la cartera de los créditos había sido formada con los créditos malos. Según cálculos que se han hecho públicos, en 2006 los créditos *subprime* representaban el 20% del valor total de los créditos extendidos, pues alcanzaban la suma de 600 mil millones de dólares; crecimiento notorio si se compara con los 160 mil millones que alcanzaron en 1999, año en que representaron el 13% del valor total de los créditos otorgados. También debe tomarse en cuenta que el endeudamiento de los jefes de familia estadounidenses había crecido en forma considerable, hasta representar en 2007 el 127% del ingreso personal disponible. El enorme endeudamiento de las familias que se observó en Estados Unidos hizo que entre 2001 y 2007 se duplicara la deuda hipotecaria, y a mediados de 2008 el monto por este concepto alcanzaba una magnitud impresionante, pues se encontraba en torno a los 16 y medio billones de dólares.

En el auge de la dinámica del mercado inmobiliario de Estados Unidos estaban presentes las condiciones financieras siguientes: bajas tasas de interés, existencia de liquidez y desregulación de las actividades de intermediarios y del funcionamiento de los mercados. Al estudiar diferentes episodios de alzas desmesuradas en precios de los bienes inmobiliarios que ocurrieron a partir de 1970 en 18 países altamente industrializados, Ahearne *et al.* (2005) identifican estas tres condiciones como elementos que han estado presentes también en esos episodios. Por lo tanto, es posible considerar tales condiciones como características o hechos estilizados de las burbujas especulativas de los mercados de bienes inmuebles.

## Evolución de la crisis financiera mundial

En 2004 se empezó a observar un cambio radical en la política monetaria de Estados Unidos, con un marcado endurecimiento. Como una medida cuyo objetivo básico era controlar la inflación que se venía observando a consecuencia de los hechos reseñados brevemente en los párrafos iniciales de la sección anterior de este trabajo, la Reserva Federal empezó a aumentar las tasas de interés. La nueva política restrictiva hizo que la tasa de interés se elevara de un modesto 1% cuando inició el nuevo giro de la política monetaria hasta alcanzar el 5.25% durante 2006. Desde agosto de 2005 se había observado una caída tanto en las ventas como en los precios de las viviendas en Estados Unidos, pero las tasas de interés se convirtieron en un obstáculo importante para que los deudores hipotecarios pudieran honrar o refinanciar los pagos de sus hipotecas, pues ahora eran altas en comparación con el momento en que habían contratado sus créditos para la adquisición de vivienda.

Aunque únicamente el 80% de los créditos hipotecarios que se habían otorgado a los solicitantes cuya calificación correspondía a la clase *subprime* se contrataron en la modalidad de tasas ajustables, la tasa de morosidad empezó a aumentar en forma por demás drástica. Es importante destacar que entre los clientes incumplidos no sólo se encontraban los de tipo *subprime* sino también muchos deudores que no habían recibido esta calificación. Además del notable incremento en el número de juicios hipotecarios debido al encarecimiento del crédito, como consecuencia de las alzas en las tasas de

interés, se observó también una fuerte caída en los niveles de construcción de vivienda nueva, así como presiones sobre el consumo de las familias, que veían menguar su riqueza a medida que descendía el valor de sus propiedades, por una parte, mientras que, por otra, se incrementaba el valor de sus deudas.

Otra consecuencia de la crisis *subprime* fue el pánico financiero que se desató y la fuerte contracción del crédito bancario ocurrida. El pánico de los inversionistas, acompañado de la conducta de rebaño típica de las crisis de los mercados financieros, produjo una fuerte pérdida en el valor de los títulos respaldados por hipotecas que se negociaban en él. La sequía del crédito bancario se produjo a consecuencia de las pérdidas, que redujeron drásticamente los niveles de capitalización de los bancos e incluso llevaron a la quiebra a varias de estas instituciones. A la crisis financiera que iniciaba se sumaron los desequilibrios económicos que sirvieron de entretelones al auge y la caída de los mercados asociados con la venta de bienes inmobiliarios, lo cual propició el surgimiento de fuertes expectativas negativas en torno al crecimiento económico de Estados Unidos debido a niveles de inversión productiva menores que los esperados y al subsecuente aumento del desempleo.

No obstante que hasta aquí se han reseñado hechos concernientes al contexto estadounidense, cabe mencionar que también se volvió muy alta la exposición al riesgo de muchos intermediarios financieros de otras partes del mundo, que habían acudido presurosos a invertir en los títulos relacionados con las deudas hipotecarias de los ciudadanos de Estados Unidos. Una muestra del dinamismo que mostraron los inversionistas de otros países la proporciona Song (2008), quien estima que a finales de 2007 se encontraban en manos de extranjeros más de un billón y medio de dólares de la deuda emitida por Fannie Mae y Freddie Mac, agencias creadas por el gobierno de Estados Unidos para facilitar el financiamiento hipotecario, el cual llevaban a cabo con los fondos adquiridos mediante la emisión de bonos. De acuerdo con información publicada por el Fondo Monetario Internacional, a mediados de 2006 se encontraban en manos de inversionistas no estadounidenses bonos vinculados con hipotecas de alto riesgo por un valor de 624 mil millones de euros. Pronto los efectos de la crisis se manifestaron en otros mercados y países; en 2006 la Bolsa de Valores de Nueva York ya reflejaba sus efectos, reduciendo con su caída aún más la riqueza de las

familias estadounidenses que mantenían sus acciones. En agosto de 2007 la crisis alcanzó a los mercados financieros de todo el orbe.

La crisis que se presentó en Irlanda en el segundo semestre de 2008 hizo que este país, que fue en algún momento anterior el de mayor crecimiento en la zona monetaria del euro, se convirtiera en el primer país europeo en anunciar que se encontraba en recesión y presentara una caída drástica del empleo, en un entorno de pérdida de confianza porque la crisis coincidió con una serie de escándalos bancarios. El 24 de febrero de 2009 el índice de la bolsa de Dublín, el Irish Stock Exchange (ISEQ) caía a su mínimo en 14 años.

Cuando el gobierno socialista asumió el poder en Grecia, después de su triunfo electoral en 2009, hizo público que el gobierno conservador previo había mostrado cifras fraudulentas sobre el tamaño de su déficit, y demostró que era en realidad de 12.7% del PIB nacional y no de 3.7% como había manifestado el gobierno predecesor. Los gobiernos previos, con ayuda de Goldman Sachs, también habían ocultado el monto real de la deuda griega mediante el uso de instrumentos derivados que les permitía emitir deuda en divisas diferentes del euro. Como consecuencia del escándalo desatado, las calificadoras redujeron el grado de calificación de la deuda griega a la clase de bonos “chatarra”, lo que no sólo significó la falta de confianza en la deuda emitida por el gobierno griego, sino también puso presión sobre éste, pues los inversionistas exigían intereses más altos para prestarle. A la fecha, Grecia enfrenta graves problemas y los planes de austeridad no han logrado resolver la situación, e incluso es probable que el gobierno tenga que recurrir a la suspensión de pagos.

También otros países europeos han sufrido problemas financieros durante este periodo. En 2008, Islandia enfrentó dificultades para refinanciar su deuda de corto plazo y unos meses después había perdido a sus tres principales bancos comerciales. Actualmente destacan los ejemplos problemáticos de Portugal e Italia.

En México también se resintieron los efectos de la crisis mundial, por ejemplo en forma de presiones cambiarias a fines de 2008 inducidas por el retiro masivo de fondos por parte de los inversionistas extranjeros, cuya suma ascendió a cerca de 30 mil millones de dólares que habían invertido en la Bolsa Mexicana de Valores y en bonos de deuda del gobierno mexicano. López *et al.* (2011) muestra que a pesar de las subastas de dólares que ha

llevado a cabo la autoridad monetaria mexicana para contener la volatilidad cambiaria, ésta no cedió, o al menos no lo hizo en forma fácil, lo cual significa un alto costo en términos de las reservas internacionales que el Banco de México tuvo que emplear.

## Modelo de volatilidad con cadenas de Markov

En la distribución de los rendimientos de activos financieros se observan grandes picos, colas pesadas y exceso de curtosis en comparación con lo que se esperaría en una distribución normal; además, la volatilidad varía en el tiempo. Para enfrentar estos hechos estilizados surgieron los modelos de volatilidad variante en el tiempo o de volatilidad condicional, como los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH, por sus siglas en inglés) o los de volatilidad estocástica. De acuerdo con Taylor (1986), los modelos de volatilidad estocástica tienen mayor sentido económico, pues el proceso de la volatilidad debe ser conducido por fuerzas económicas, no sólo por los movimientos pasados de los precios.

El comportamiento de una variable en el tiempo puede cambiar debido a la presencia de cambios estructurales que inducen cambios de carácter permanente u otros en que se pueden observar respuestas a hechos coyunturales. También puede haber cambios temporales pero recurrentes, pues sus efectos son transitorios y aparecen en forma cíclica. En cualquier caso, los cambios pasados o potenciales pueden hacer que los modelos que utilizan parámetros constantes no sean suficientemente adecuados para modelar una variable alterada por algún cambio o una serie de cambios con el paso del tiempo. Entre las alternativas de modelos no lineales han surgido los modelos de cambio markoviano de régimen, según los cuales el propio cambio en el comportamiento de una variable está sujeto a la dinámica regida por un proceso cuya naturaleza es estocástica.

Hamilton (1989) extiende los alcances de la regresión de cambios markovianos de Goldfeld y Quandt (1973) proponiendo modelar, mediante procesos discretos de Markov, los cambios ocasionales y discretos en la tasa media de crecimiento de una serie no estacionaria, y muestra la aplicación de su técnica al análisis empírico del producto nacional bruto (PNB) real de Estados Unidos en los años posteriores a la Segunda Guerra Mundial. El modelo presenta-

do por Hamilton (1989) le permitió tomar en cuenta los comportamientos diferenciados que observó Neftci (1984) en el comportamiento de variables económicas relacionadas con el empleo, con lo cual se diferencia este comportamiento de acuerdo con la fase del ciclo económico. Adicionalmente, con el método de estimación que propuso, Hamilton pudo reproducir adecuadamente los puntos en que se observó un cambio de fase en el ciclo económico de acuerdo con la imputación de fechas establecida por el National Bureau of Economic Research (NBER). En un trabajo más reciente, Hamilton (2005) revisa el comportamiento del desempleo en Estados Unidos, así como de la tasa de interés, y muestra evidencia de que en ambos casos se logra un mejor ajuste cuando se toma en cuenta en los modelos en forma explícita que existen cambios de régimen que afectan el desempeño del modelo.

Hay otras aplicaciones relevantes de los modelos basados en cadenas de Markov, aunque por razones de espacio no se hace aquí un recuento detallado de ellas. En el caso de México se pueden mencionar los trabajos de Ramírez y Sandoval (2002), quienes detectan elementos pronosticables en un portafolio formado por acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores; López y Venegas (2011), quienes analizan la volatilidad del mercado accionario mexicano durante la crisis, y López *et al.* (2011), que estudian la volatilidad del tipo de cambio peso-dólar.

Taylor (2005) propone como representación general del proceso de los rendimientos:

$$r_t = \mu + \sigma_t u_t; \quad u_t \sim iidN(0,1). \quad (1)$$

La presencia de los hechos estilizados mencionados podría deberse a que la distribución de los rendimientos es una mezcla de distribuciones normales con varianzas diferentes. A partir de lo anterior, Hamilton (1988) propone un proceso estocástico para modelar la volatilidad de los rendimientos suponiendo que ésta varía en el tiempo siguiendo una cadena de Markov cuya distribución discreta de probabilidades tiene dos estados:

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_{baja} & \text{con probabilidad } p \\ \sigma_{alta} & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases} \quad (2)$$

$$\sigma_t > 0, \sigma_{baja} < \sigma_{alta}$$

Dado que  $\{S_t\}$  es un proceso de Markov, la probabilidad de pasar al régimen de alta volatilidad desde el régimen de volatilidad baja sólo depende del último estado en que se encontraba el proceso, es decir, la probabilidad de transición está dada por:

$$p_{ba} = P(S_t = s_{alta} \mid S_{t-1} = s_{baja}), \quad (3)$$

y la probabilidad de transición del régimen de volatilidad alta al de baja volatilidad por:

$$p_{ab} = P(S_t = s_{baja} \mid S_{t-1} = s_{alta}). \quad (4)$$

Así, los rendimientos se distribuyen  $N(ms_{baja}^2)$  cuando la volatilidad se encuentra en el régimen de baja volatilidad y  $N(ms_{alta}^2)$  cuando la volatilidad se encuentra en el régimen de volatilidad alta. Suponiendo que el proceso  $\{S_t\}$  es estacionario estrictamente y también estocásticamente independiente de  $\{u_t\}$ , se pueden derivar fórmulas para los momentos de  $r_t - m = s_t u_t$ ; como lo señala Taylor (2005). Así, de acuerdo con (1) y (2),  $E(r_t) = m$  y  $\text{var}(r_t) = E[\sigma_t^2]$ . Por su parte, la varianza no condicional de los rendimientos resulta ser:

$$s^2 = \text{var}(r_t) = E(s_t^2) = p s_{baja}^2 + (1 - p) s_{alta}^2 \quad (5)$$

También se tiene que la densidad no condicional es una mezcla de densidades normales:

$$f(r_t) = p \psi(r_t \mid \mu, \sigma_{baja}^2) + (1 - p) \psi(r_t \mid \mu, \sigma_{alta}^2) \quad (6)$$

En la ecuación (6),  $\psi(\bullet)$  representa la función de densidad normal. También se tiene:

$$s_t^2 = s^2 + (1 - p_{ba} - p_{ab})(s_{t-1}^2 - s^2) + x_t \quad (7)$$

Pagan (1996) afirma que en este caso  $x_t$  es un ruido blanco según la descomposición de Wald de un proceso estacionario, incluso aunque  $x_t$  no

sea i.i.d. De acuerdo con (7), se tiene que  $\{s_t^2\}$  es un proceso AR(1) con un parámetro autorregresivo:

$$f = 1 - p_{ba} - p_{ab} \quad (8)$$

que mide la persistencia de la volatilidad.<sup>1</sup>

La información proporcionada por los rendimientos no es suficiente para identificar el estado en que se encuentra la volatilidad en un momento dado, por lo que se recurre a las probabilidades condicionales del régimen según el historial de rendimientos previos:

$$p_t = P(s_t = s_b | W_{t-1}) \text{ y } q_t = P(s_t = s_a | W_{t-1}). \quad (9)$$

$W_{t-1}$  es el conjunto de información formado por el historial de los rendimientos hasta  $t-1$ . Si se supone que  $p_{t-1}$  y  $q_{t-1}$  ya se han obtenido a partir de  $W_{t-2}$ , las probabilidades *a priori* se pueden revisar mediante el teorema de Bayes cuando  $r_{t-1}$  está ya disponible y se pueden calcular las probabilidades revisadas o posteriores:

$$p_{t-1}^* = P(s_{t-1} = s_b | W_{t-1}) = \frac{p_{t-1}y(r_{t-1} | ms_b^2)}{p_{t-1}y(r_{t-1} | ms_b^2) + q_{t-1}y(r_{t-1} | ms_a^2)}, \quad (10)$$

$$q_{t-1}^* = 1 - p_{t-1}^*.$$

A partir de las probabilidades de transición de la cadena de Markov, se tienen también las probabilidades previas:

$$p_t = p_{t-1}^*(1 - p_{ba}) + q_{t-1}^*p_{ab}. \quad (11)$$

Al combinar (10) y (11) se obtienen las probabilidades condicionales:

<sup>1</sup> Mientras más cercano a 1 se encuentre dicho valor, más persistente será el proceso de la volatilidad.

$$p_t = \frac{p_{t-1}y(r_{t-1} | ms_b^2)(1 - p_{ba}) + q_{t-1}y(r_{t-1} | ms_a^2)p_{ab}}{p_{t-1}y(r_{t-1} | ms_b^2) + q_{t-1}y(r_{t-1} | ms_a^2)}. \quad (12)$$

La densidad condicional de  $r_t$ , dado  $W_{t-1}$ , también es una mezcla de distribuciones normales:

$$f(r_t | W_{t-1}) = p_t y(r_t | ms_b^2) + (1 - p_t) y(r_t | ms_a^2). \quad (13)$$

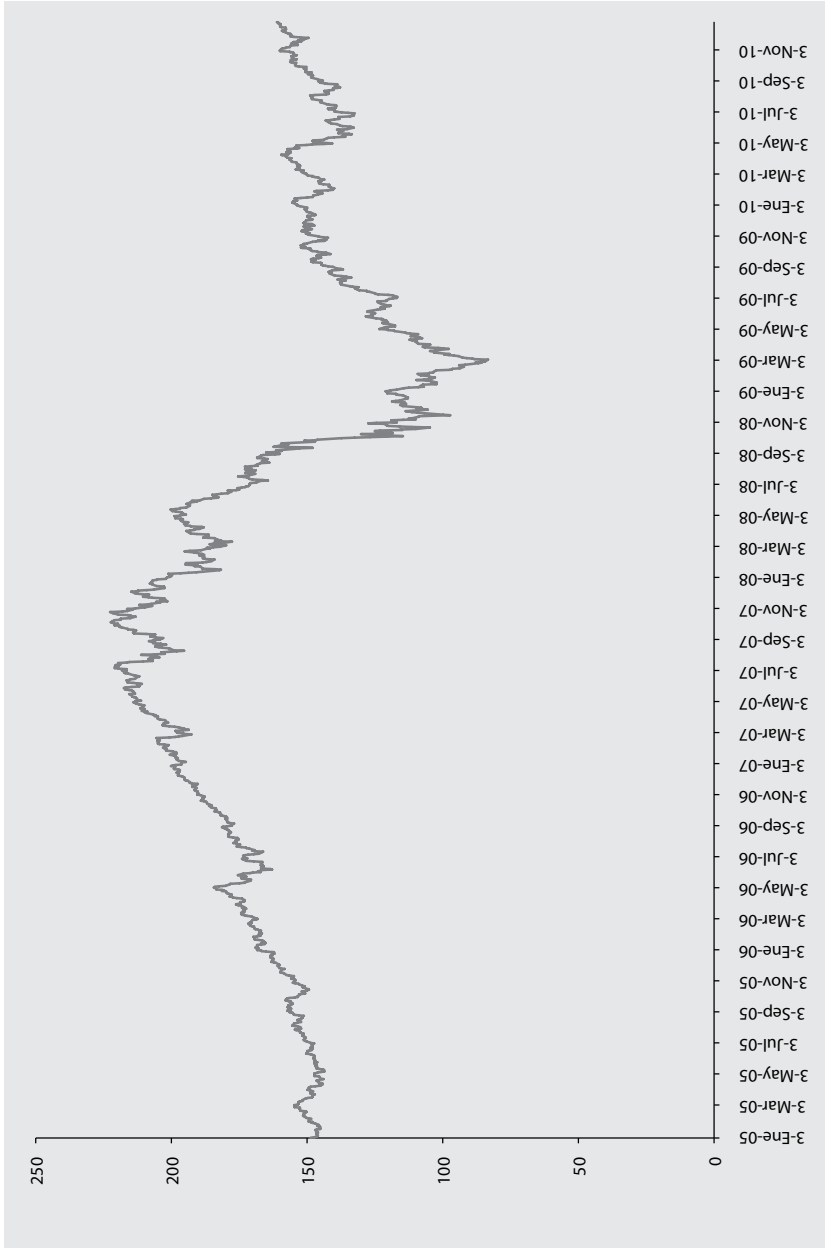
Por su parte, la varianza condicionada de los rendimientos está dada por el proceso:

$$h_t = p_t s_b^2 + (1 - p_t) s_a^2. \quad (14)$$

Este proceso para estimar los parámetros de interés  $\mu$ ,  $\sigma_{baja}$ ,  $\sigma_{alta}$ ,  $p$  y  $\phi$  fue presentado por Hamilton (1988, 1989), por lo que recibe el nombre de filtro de Hamilton, y es similar al de Kalman. En ambos casos la estimación de los parámetros puede hacerse optimizando la función de verosimilitud, y en el caso del modelo que nos ocupa en este trabajo, como productos adicionales de la estimación por medio del filtro de Hamilton, se pueden obtener las probabilidades de transición, las probabilidades condicionadas y las varianzas condicionadas.

## Análisis de la volatilidad del mercado mundial de capitales

Se utiliza como representante del mercado mundial de capitales el All World Index, construido por Morgan Stanley, con observaciones diarias desde el primer día de operaciones de 2005 hasta el último día hábil de 2010. En la gráfica 1 se muestra el comportamiento del índice, en el cual se puede observar que de 2005 a 2007 tuvo un proceso de crecimiento pero después se encuentra una tendencia descendente que concluye en 2010, con una recuperación que apenas logra superar el valor con que inició el año de 2005.



Gráfica 1. Comportamiento del mercado mundial de capitales: 2005-2010

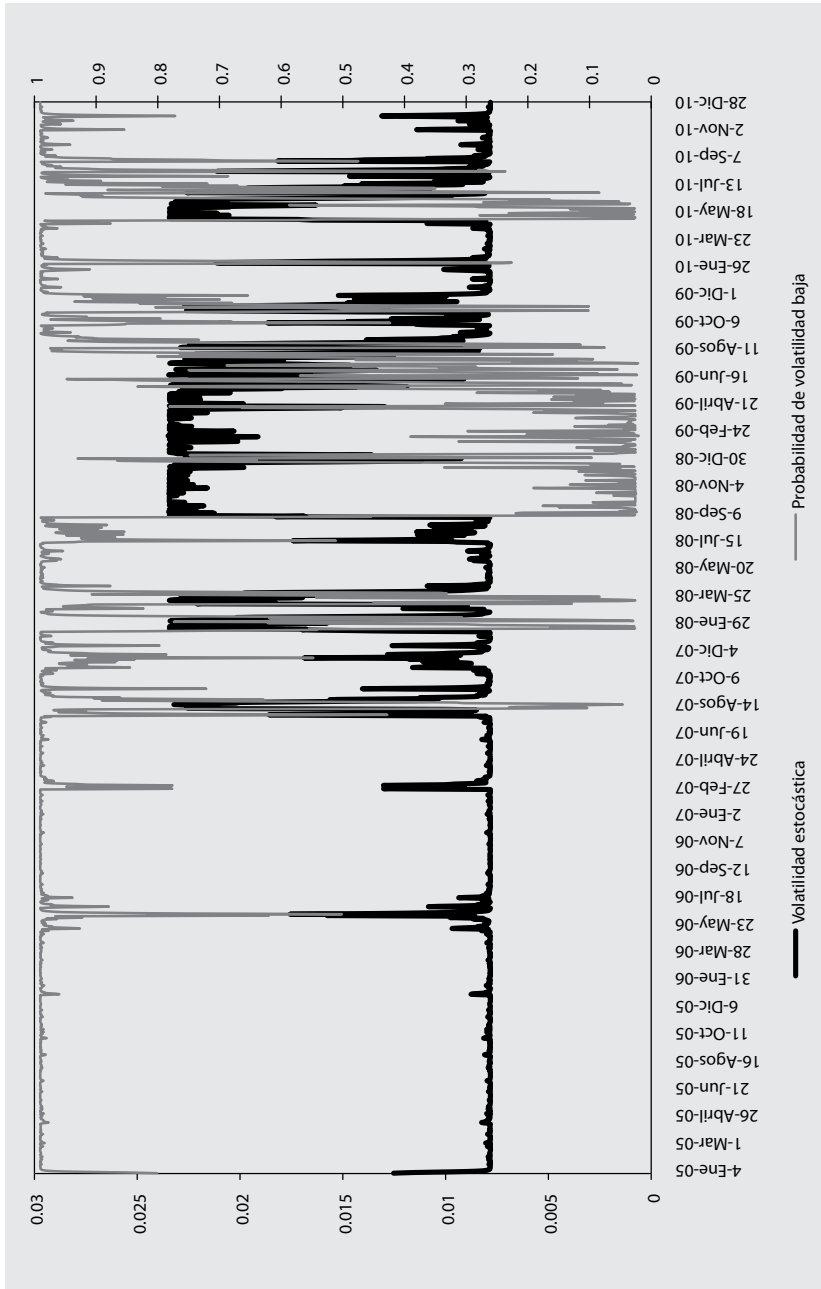
Se construyó la serie de rendimientos logarítmicos:  $r = \log(P_t/P_{t-1})$ , donde  $P_t$  es el valor del índice al cierre del periodo  $t$ . En la tabla 1 se presentan los valores estimados de los parámetros del modelo que se describió en la sección anterior y se puede ver que la magnitud de la volatilidad estimada ( $\approx 0.024$ ) en el estado alto es poco más de tres veces la magnitud de la volatilidad estimada ( $\approx 0.0075$ ) para el estado bajo. También se observa que el valor del parámetro  $\phi$ , superior a 0.96, sugiere persistencia alta; sin embargo, esto es un hallazgo bastante común al modelar la varianza condicionada con modelos de volatilidad estocástica o con modelos ARCH.<sup>2</sup> En última instancia, lo que se debe tomar en cuenta es que la persistencia alta implica que los impactos de los choques en la varianza condicional no se desvanecen rápidamente y, por lo tanto, la información presente tiene impactos significativos en la volatilidad futura.

Tabla 1. Parámetros estimados	
Parámetro	Valor
$\sigma_{baja}$	0.007510654
$\sigma_{alta}$	0.023715511
$\rho$	0.801141974
$\phi$	0.967811709
Log-verosimilitud 5014.24	

En la tabla 2 se muestra que las probabilidades de cambiar de estado no son muy altas. Destaca en particular que la probabilidad de pasar del régimen de baja al de alta volatilidad es menor que la de pasar de este último régimen al de baja.

Tabla 2. Probabilidades de transición			
		$S_t$	
		Régimen alto	Régimen bajo
$S_{t-1}$	Régimen bajo	0.00640090	0.99359910
	Régimen alto	0.97421261	0.025787391

<sup>2</sup> En la literatura se pueden encontrar ejemplos en estudios efectuados hace varios años. Por ejemplo, Chou (1988), French *et al.* (1987), Baillie y DeGennaro (1990) y Fong (1997) reportan valores del parámetro de persistencia superiores a 0.9 para rendimientos accionarios diarios. Por su parte, Brenner *et al.* (1996) y Anderson y Lund (1997) estiman valores de 0.82 y 0.98, respectivamente, para los rendimientos semanales de los T-bill estadounidenses a tres meses. En López y Venegas (2011) se observa un valor superior a 0.95 en la estimación de dicho parámetro.



**Gráfico 2.** Volatilidad del mercado mundial de capitales y probabilidades filtradas del régimen de volatilidad baja, 2005-2010.

En la gráfica 2 se muestran las volatilidades condicionales diarias estimadas y las probabilidades filtradas de que la volatilidad del mercado mundial de capitales se encuentre en el régimen de baja volatilidad. Desde finales de julio de 2007 se observa en el comportamiento una historia diferente a la que presentaba antes de esas fechas. Es decir, de una volatilidad predominante baja con episodios esporádicos de aumento de volatilidad, en los cuales incluso las probabilidades no sugieren que los rendimientos del mercado mundial de capitales hayan abandonado el régimen de volatilidad baja, se pasa a periodos que se pueden caracterizar como propios del régimen de volatilidad alta, como lo sugieren las volatilidades y las probabilidades estimadas, apenas interrumpidos por periodos cortos identificados como propios del régimen de baja volatilidad.

Las probabilidades estimadas de encontrarse en el régimen de baja volatilidad muestran una súbita caída el 30 de julio en la cual, a pesar de haberse recuperado en algunos días de agosto, se observan en la mayoría de los días de este último mes valores de probabilidad que sugieren definitivamente que la volatilidad del mercado mundial de capitales era alta. De esta manera, después de la llamada “decena trágica” (los primeros diez días de agosto) se tenía como saldo final la crisis financiera en plena erupción, misma que continuó en los meses posteriores.

---

## Conclusiones

En este trabajo se presenta el análisis de la volatilidad del mercado mundial de capitales en el periodo previo al estallido de la crisis financiera, durante el estallido de la misma y hasta 2010. La base del análisis ha sido un modelo de volatilidad cuya dinámica estocástica está dictada por una cadena de Markov con dos estados: volatilidad baja y volatilidad alta.

De manera general, se puede decir que las estimaciones de las volatilidades y de las probabilidades mediante el modelo de volatilidad estocástica que se utilizó permiten caracterizar los periodos de volatilidad en forma consistente con los hechos acontecidos en plena crisis de las hipotecas *subprime* y sus secuelas (quiebras de bancos en Estados Unidos y el resto del mundo, sin importar el tamaño ni su trayectoria histórica, incrementos en los juicios hipotecarios y de embargos a los deudores, rescates de institu-

ciones financieras y planes de apoyo a deudores), así como con los eventos de crisis que se observaron en otros países, que hicieron más convulsa una parte importante del periodo que cubre este análisis.

La exposición de los mercados financieros de Estados Unidos a los eventos que ocurren en los mercados financieros de otros países ha crecido en forma notoria como resultado de los procesos de liberalización y apertura financiera de todo el mundo y del enorme desarrollo de los medios de comunicación, que han propiciado un mayor grado de integración de los diferentes mercados financieros. En particular, es necesario tomar en cuenta que, además de la crisis financiera, cuyos orígenes se encuentran en la burbuja especulativa observada en el mercado estadounidense de bienes inmuebles, estaban presentes otros riesgos económicos desde antes del estallido de la crisis, y durante ésta el entorno mundial recesivo y la situación económica de otros países han complicado todavía más el panorama mundial.

El nivel de riesgo que enfrentan los inversionistas tanto por el funcionamiento de los mercados como por el entorno económico en que se llevan a cabo sus inversiones, a veces especulativo como hemos visto en este trabajo, hace necesario el desarrollo de nuevas técnicas y métodos para medir y administrar el riesgo. Por lo tanto, se deben seguir estudiando modelos que puedan tomar en cuenta lo mejor posible las características de los fenómenos financieros y económicos. Por el desempeño mostrado, los modelos que consideran cambios markovianos en el modelado pueden constituir un buen punto de partida para la investigación orientada al desarrollo de modelos más acordes a la realidad.

---

## Bibliografía

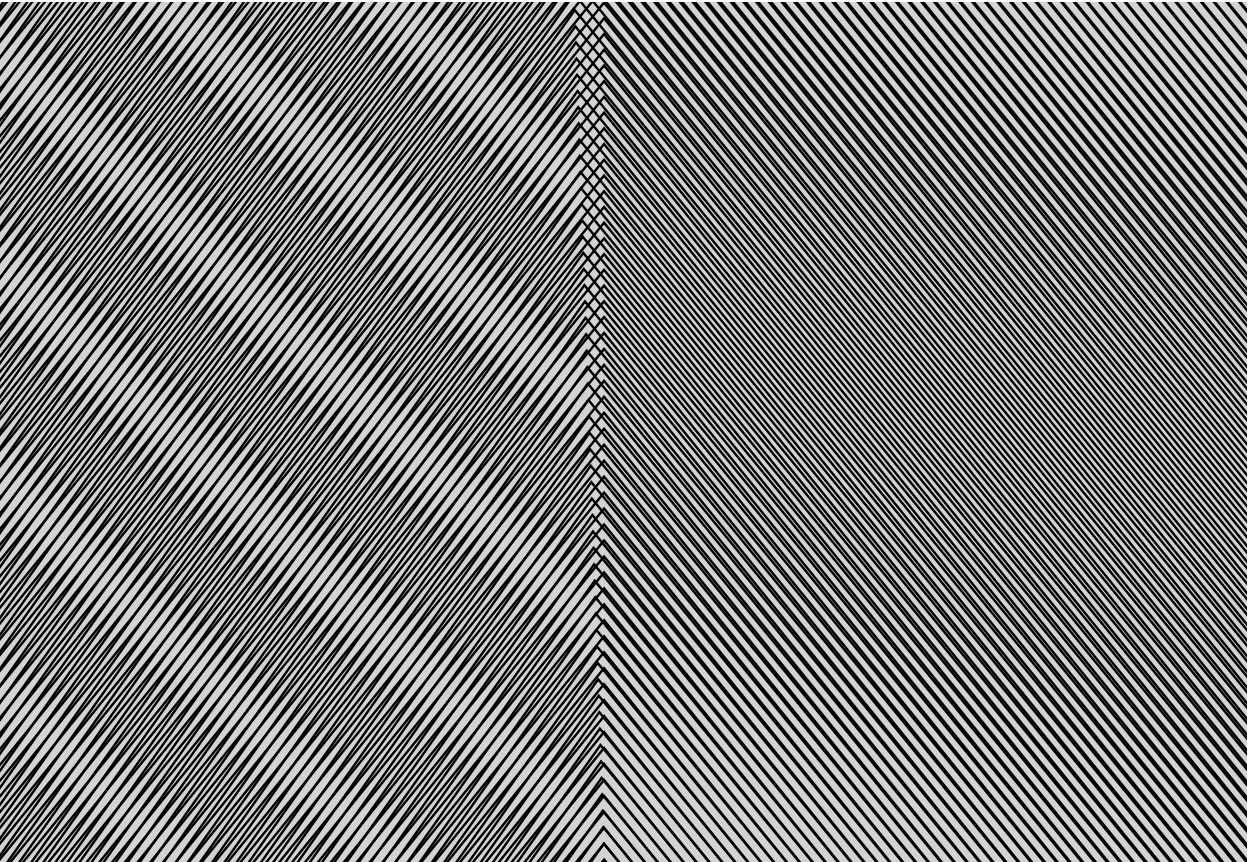
- Ahearne, A. G., Ammer, J., Doyle, B. M., Kole, L. y Martin, R. (2005). House prices and monetary policy: A cross-country study. *International Finance Discussion Papers* 841.
- Anderson, T. y Lund, J. (1997). Estimating continuous time stochastic volatility models of the short-term interest rates. *Journal of Econometrics*, 77, 343-377.
- Baillie, R. y De Gennaro, R. (1990). Stocks returns and volatility. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 203-215.

- Brenner, R. J., Harjes, R. y Kroner, K. (1996). Another look at models of short-term interest rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 85-107.
- Chou, R. (1988). Volatility persistence and stock valuation: Some empirical evidence using GARCH. *Journal of Applied Econometrics*, 3, 279-294.
- Demyanyk, Y. y Van Hemert, O. (2008). Understanding the subprime mortgage crisis. Working Paper Series, Social Science Electronic Publishing. Recuperado de [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1020396](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1020396).
- Federal Reserve Board (2008). Statistics: Releases and historical data.
- Financial Crisis Inquiry Commission (2011). The financial crisis inquiry report, enero de 2011. Recuperado de <http://www.fcic.gov/report>.
- Fong, W. (1997). Volatility persistence and switching ARCH in Japanese stock returns. *Asia-Pacific Financial Market*, 4, 37-57.
- French, K., Schwert, G. W. y Stambaugh, R. F. (1987). Expected stock returns and volatility. *Journal of Financial Economics*, 19, 3-30.
- Goldfeld, S. y Quandt, R. (1973). A Markov model for switching regressions. *Journal of Econometrics*, 1, 3-16.
- Gorton, G. (2008). The panic of 2007. Preparado para la Jackson Hole Conference, Federal Reserve Bank of Kansas City.
- Hamilton, J. (1988). Rational-expectations econometric analysis of changes in regime: An investigation of the term structure of interest rates. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 385-423.
- Hamilton, J. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, 57, 357-384.
- Hamilton, J. (2005). What's real about the business cycle? *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, 87(4), 435-452.
- López, F., Rodríguez, D. y Ortiz, F. (2011). Volatilidad estocástica del tipo de cambio peso-dólar: el régimen flotante en México. *Investigación Económica*, 70(276), 19-50.
- López, F. y Venegas, F. (2011). La crisis financiera mundial y la volatilidad del mercado accionario mexicano. En Mendoza Velázquez, A., López Herrera, F. y Watkins Fassler, K. (coords.) (2011), *Reflexiones sobre las crisis financieras*. México: Centro de Investigación e Inteligencia Económica (CIIE-UPAEP) y División de Investigación de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Nacional Autónoma de México.
- Neftci, S. (1984). Are economic time series asymmetric over the business cycle? *Journal of Political Economy*, 92, 307-328.

- Ramírez, J. y Sandoval, R. (2002). ¿Existen componentes pronosticables en las series de los rendimientos de las acciones? *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, 11, 39-58.
- Song Shin, H. (2008). Securitization, subprime mortgages and global imbalances. Working Paper, Princeton University.
- Taylor, S. (1986). *Modelling financial time series*. New York: Wiley.
- Taylor, S. (2005). *Asset price dynamics, volatility, and prediction*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Turner, C., Startz, R. y Nelson, C. (1989). A Markov model of heteroskedasticity, risk, and learning in the stock market. *Journal of Financial Economics*, 25(1), 3-22.

Ricardo Hernández Pérez  
Dirección de fabricación de la plataforma en el programa satelital Satmex 8

# **La desviación de Allan aplicada al estudio de escalamiento en series de retornos financieros**



## Introducción

La dinámica de precios para activos financieros ha sido objeto de estudio en la econofísica, y se han reportado importantes resultados que revelan escalamiento en las series de retornos financieros, así como rasgos de colas alargadas en las distribuciones de probabilidad en cambios de precio (Mantegna, 2000; Bouchaud *et al.*, 2000; Voit, 2005). En resumen, se han reportado dos tipos de escalamiento en series financieras (Di Matteo, 2007):

1. El comportamiento de algunas formas de medir la volatilidad (varianza de los retornos o del valor absoluto de éstos) como una función del intervalo de observación, en el cual se calculan los retornos, lo que proporciona una estimación del exponente de escalamiento relacionado con la dimensión fractal y con el exponente de Hurst.
2. El comportamiento de las colas de la distribución de retornos como una función del cambio en el precio, manteniendo constante el intervalo de tiempo de los retornos, lo que proporciona una estimación del llamado índice de la cola de la distribución. Si se asume que los retornos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con distribución gaussiana, se obtiene que el logaritmo del precio tiene el comportamiento de una caminata aleatoria gaussiana (Voit, 2005). Tales supuestos fueron introducidos por Bachelier en su trabajo *Théorie de la spéculation* (Voit, 2005). Sin embargo, diversos estudios han reportado que las series de retornos exhiben rasgos multiescala (Mantegna, 2000). Más aún, las series de tiempo de precios de activos financieros exhiben no estacionariedad, por lo que el cálculo de cantidades estadísticas como la desviación estándar clásica podría proporcionar datos erróneos.

La varianza de Allan (AVAR) es una varianza de dos muestras desarrollada en el campo de la metrología de tiempo y frecuencia para la caracterización cuantitativa de las inestabilidades en la frecuencia de un oscilador,

donde las inestabilidades consisten en el desvío de la frecuencia instantánea  $\nu(t)$  de su valor nominal  $\nu_0$  (Rutman, 1978). Más aún, la AVAR es aceptada como un estándar para cuantificar la estabilidad de frecuencia, puesto que es una cantidad determinista robusta para analizar series de tiempo no estacionarias con el fin de caracterizar la variabilidad de la serie de tiempo en diferentes intervalos de observación. El formalismo matemático que define a la AVAR es aplicable a cualquier otra serie de tiempo, ya que en su definición no se hacen suposiciones *a priori* sobre el origen y las características de la serie de tiempo bajo estudio. El análisis de AVAR se enfoca en la varianza de las fluctuaciones en diferentes intervalos de observación.

Un estudio anterior considera los cambios en los retornos en diferentes escalas de tiempo usando la desviación estándar clásica (Pasquini y Serva, 1999) y encuentra una relación de escalamiento entre el ancho de la ventana de análisis y la desviación estándar. En el presente trabajo nos interesa aplicar la AVAR a series de retornos financieros con el propósito de estudiar su varianza para diferentes intervalos de observación (escalas de tiempo).

Aplicamos este análisis a precios de apertura diarios para activos en diferentes mercados y encontramos una diferencia significativa entre los resultados para series de retornos y los obtenidos para la serie del valor absoluto de los retornos, en los cuales la acumulación (*clustering*) observada en la serie influye en los resultados obtenidos de la desviación de Allan (ADEV), definida como la raíz cuadrada de la varianza de Allan.

## Métodos, desviación de Allan

En el campo de metrología de tiempo y frecuencia, la desviación normalizada de frecuencia  $y(t)$  de los osciladores (que comúnmente son relojes atómicos) se define en términos de la frecuencia nominal  $\nu_0$  del oscilador y de la frecuencia instantánea  $\nu(t)$  como:  $y(t) = (\nu(t) - \nu_0) / \nu_0$  (Allan, 1987). La desviación normalizada de frecuencia se obtiene de la desviación de fase del oscilador  $x(t)$ . Las desviaciones de fase y frecuencia son variables estocásticas relacionadas por la siguiente expresión (Allan *et al.*, 2008):

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (1)$$

la cual se escribe de la siguiente manera para tiempo discreto:

$$y[i] = \frac{x[i+1] - x[i]}{\tau_0}, \quad (2)$$

donde  $\tau_0$  es el intervalo de tiempo de observación mínimo. La definición de la AVAR está dada por la siguiente expresión (Allan, 1987; Allan *et al.*, 1988):

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{t+\tau} - \bar{y}_t)^2 \rangle, \quad (3)$$

donde  $\tau$  es el intervalo de observación,  $\langle \cdot \rangle$  denota el promedio temporal y la desviación de frecuencia media  $\bar{y}_t$  está definida como

$$\bar{y}_t = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} y(t') dt' = \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}. \quad (4)$$

En tiempo discreto, la AVAR es evaluada con el siguiente estimador, en términos de datos de desviación de fase:

$$\hat{\sigma}_y^2[k] = \frac{1}{2k^2 \tau_0^2 (N - 2k)} \sum_{m=0}^{N-2k-1} (x[m+2k] - 2x[m+k] + x[m])^2, \quad (5)$$

donde  $N$  es el número total de muestras y el entero  $k = \tau / \tau_0$  representa el intervalo de observación en el tiempo discreto, el cual típicamente toma valores  $k = 1, 2, \dots, \lfloor N/3 \rfloor$  (donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota la parte entera del número).<sup>1</sup> Más aún, en términos de los datos de desviación de frecuencia  $y[j]$ , el estimador es (Allan, 1987):

$$\hat{\sigma}_y^2[k] = \frac{1}{2(M - 2k + 1)} \sum_{i=1}^{M-2k-1} (\bar{y}_k[i+k] - \bar{y}_k[i])^2, \quad (6)$$

<sup>1</sup> La selección  $k_{\max} = \lfloor N/3 \rfloor$  es una convención utilizada ampliamente en la metrología de tiempo y frecuencia y se relaciona con la incertidumbre en la estimación de la varianza de Allan, la cual, para un intervalo de observación dado, es proporcional al número de diferencias (términos en la sumatoria) que contribuyen a ella.

donde  $k = \tau / \tau_0$ ,  $M$  es el número total de datos de frecuencia y los valores de frecuencia promedio están dados por:

$$\bar{y}_k[i] = \frac{1}{k} \sum_{j=i}^{i+k-1} y[j] = \frac{x[i+k] - x[i]}{k\tau_0}. \quad (7)$$

Para fluctuaciones de frecuencia que se pueden describir como procesos estocásticos con densidad de potencia espectral (DPS) dada por una ley de potencia  $S_y(f) \sim f^\beta$ , la varianza de Allan correspondiente sigue también una ley de potencia  $\sigma_y^2(\tau) \sim \tau^\eta$ , donde los exponentes de ambas leyes de potencia se relacionan por  $\eta = -\beta - 1$ , con  $-2 \leq \beta \leq 2$  (Allan, 1987), incluyendo fluctuaciones tanto de fase como de frecuencia, y cuando se restringe a las fluctuaciones en frecuencia el rango para el exponente espectral es  $-2 \leq \beta \leq 0$ .<sup>2</sup> La relación de escalamiento para la desviación de Allan (ADEV), que es la raíz cuadrada de la varianza de Allan y que se denota por  $\sigma_y(\tau)$ , está dada por

$$\sigma_y(\tau) \sim \tau^{\eta/2} \sim \tau^\mu, \quad (8)$$

con  $-0.5 \leq \mu \leq 0.5$  donde  $\mu = -0.5$  corresponde a ruido blanco,  $\mu = 0$  a ruido  $1/f$  y  $\mu = 0.5$  a movimiento browniano. Esta propiedad es útil para identificar componentes estocásticos en series de tiempo. En algunos casos la serie de tiempo bajo análisis es una superposición lineal de diferentes componentes que se describen con una DPS tipo ley de potencia,

entonces la DPS total puede escribirse como:  $S_y(f) \sim \sum_{i=1}^P A_i f^{\beta_i}$ , donde  $P$  es el número de componentes de ruidos de diferente tipo y las  $A_i$  son constantes.

Para este tipo de serie de tiempo, la ADEU será:  $\sigma_y(\tau) \sim \sum_{i=1}^P B_i \tau^{\mu_i}$ , con  $B_i$  constantes (Bregni y Jmoda, 2008).

Como ya se mencionó,  $\sigma_y(\tau)$  proporciona una manera cuantitativa de representar la estabilidad de la frecuencia de un oscilador. Por ejemplo,

<sup>2</sup> Para el caso de fluctuaciones tipo ruido blanco en los datos de fase ( $\beta = 0$ ), se presenta una ambigüedad en el exponente de la varianza de Allan que se resuelve utilizando la llamada varianza de Allan modificada (Allan, 1987).

para un intervalo de observación  $\tau = 1$  día, para un cierto oscilador, un valor de  $\sigma_y(\tau) = 10^{-3}$  indica que la frecuencia del oscilador cambia una milésima en un día. Esto no nos dice si la frecuencia está aumentando o disminuyendo, sino que nos da una medida de las fluctuaciones en la señal de frecuencia.

## Análisis de series de retornos financieros usando la desviación de Allan

Como ya se dijo, la ADEV se utiliza para la caracterización cuantitativa de las inestabilidades en la frecuencia de un oscilador, que consisten en la desviación de la frecuencia instantánea con respecto a la frecuencia nominal. Haciendo una analogía con series de tiempo financieras, uno podría pensar en un activo que en un escenario ideal tiene un precio nominal  $S_0$ . La dinámica del mercado controlará la fluctuación del precio a lo largo del tiempo, lo que producirá un precio instantáneo  $S(t)$  al tiempo  $t$ ; entonces, estudiamos estas fluctuaciones a diferentes intervalos de observación en el contexto matemático y conceptual de la desviación de Allan. Por lo tanto, la estabilidad del precio (o de los retornos) de los activos puede cuantificarse en diferentes escalas de tiempo. Este enfoque considera que el retorno financiero  $r[j]$  en el tiempo discreto está dado por:

$$r[j] = \log \frac{S[j+1]}{S[j]}. \quad (9)$$

Si hacemos un mapeo del logaritmo del precio ( $\log S[i]$ ) a los datos de fase ( $x[i]$ ) de un oscilador, el retorno medio en el intervalo de observación  $\tau = k\tau_0$  estaría dado por la siguiente expresión:

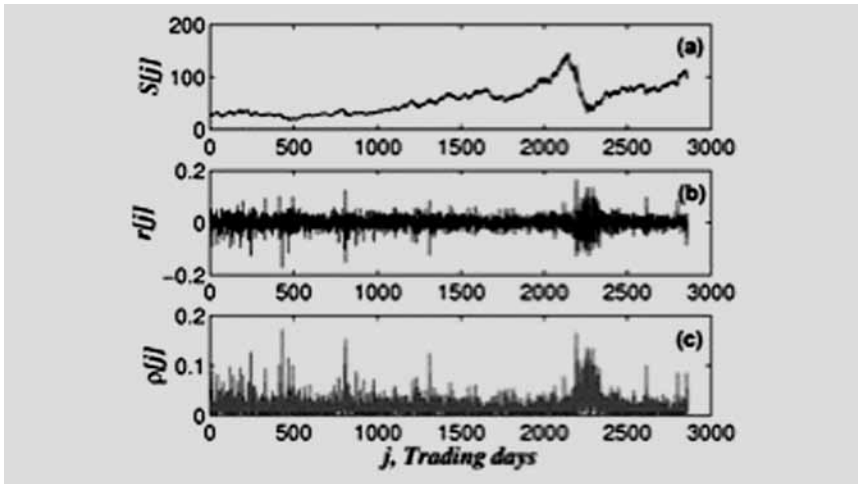
$$\bar{r}_k[i] = \frac{1}{k\tau_0} \sum_{j=i}^{i+k-1} r[j] \frac{\log S[i+k] - \log S[i]}{k\tau_0}, \quad (10)$$

que tiene la misma forma que la ecuación para la desviación promedio en la frecuencia (ecuación 7). Esta definición es similar a los retornos analizados

en estudios previos (Pasquini y Serva, 2000; Duan y Stanley, 2010). Por lo tanto, en el presente trabajo trataremos la serie del logaritmo del precio ( $\log S[i]$ ) como datos de fase en el contexto de la desviación de Allan, y el retorno medio ( $\bar{r}_k[i]$ ) en el intervalo de observación  $\tau = k\tau_0$  como datos de desviación de frecuencia. Luego entonces, la desviación de Allan de la serie  $\bar{r}_k[i]$  cuantificará la estabilidad de los retornos medios. El intervalo de observación mínimo es  $\tau_0 = 1$  para datos diarios, o menor para datos intradía. Adicionalmente, nos interesa analizar las series de los valores absolutos de los retornos (que llamaremos retornos absolutos), denotados por  $\bar{\rho}_k[i] = |\bar{r}_k[i]|$ , los cuales se relacionan con la volatilidad (Duan y Stanley, 2010). Usamos la propiedad de la ADEV para identificar componentes de ruido con DPS descrita por una ley de potencia para estudiar las propiedades de escalamiento de los retornos y los retornos absolutos para diversos intervalos de observación.

## Resultados

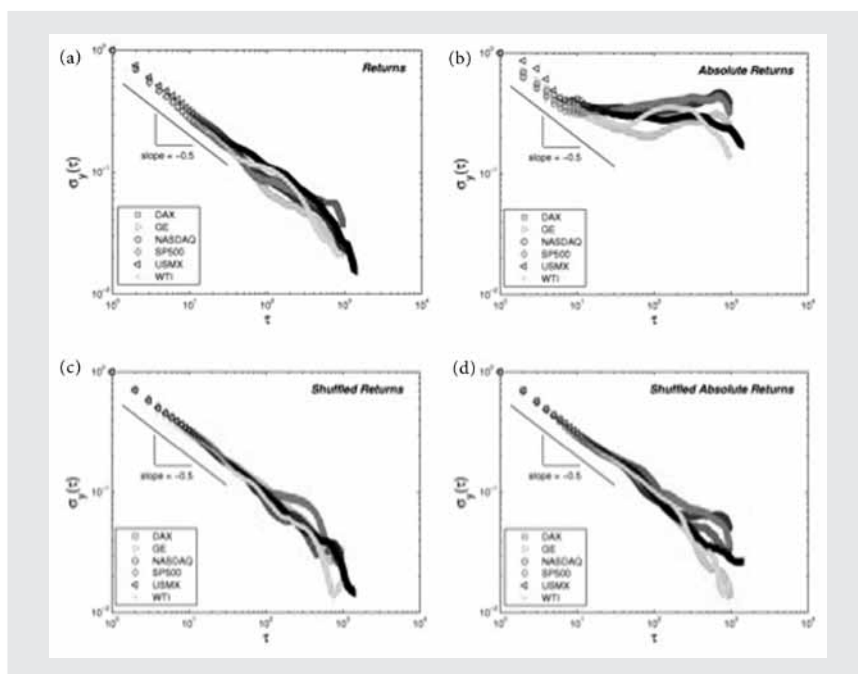
Aplicamos el análisis de la ADEV a las series de retornos de varios activos en diferentes mercados para comparar su variabilidad en diferentes escalas de tiempo, usando precios de apertura del mercado como datos de entrada. Los activos fueron seleccionados de manera primordialmente aleatoria, y son: los índices S&P 500, NASDAQ y DAX, el precio de la acción de General Electric (GE), el tipo de cambio entre el peso mexicano y el dólar estadounidense y el precio del petróleo West Texas Intermediate (WTI). Usamos datos diarios durante el periodo de enero de 2000 a mayo de 2011 obtenidos de Google Finance (<http://www.google.com/finance>), Yahoo! Finance (<http://finance.yahoo.com>) y el Banco de México (<http://www.banxico.org.mx>). Con esta selección de fechas, las series de tiempo resultaron tener una longitud aproximada de  $N = 3000$  puntos. La gráfica 1 muestra una de las series de precios analizadas, con su correspondiente serie de retornos y de retornos absolutos. También se analiza la desviación de Allan para los datos (retornos y retornos absolutos) barajados (*shuffled*) con el objetivo de comparar los resultados cuando se eliminan las correlaciones en la serie.



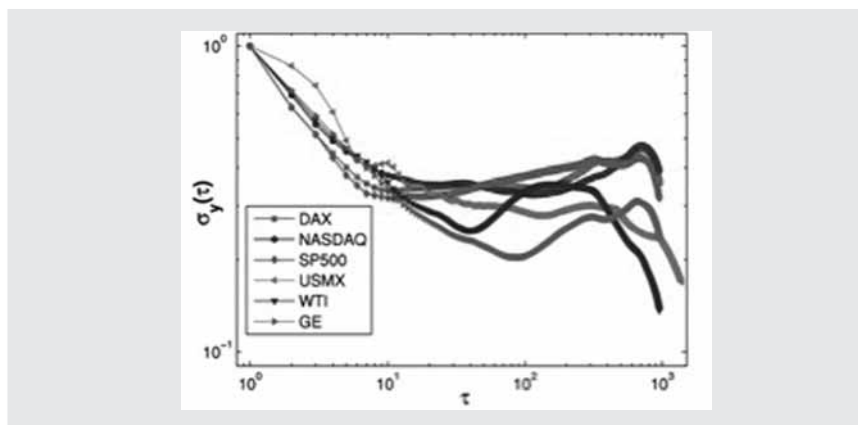
**Gráfica 1.** Precio de petróleo West Texas Intermediate, mostrando: (a) precio de apertura diario, (b) serie de retornos y (c) serie de retornos absolutos.

La gráfica 2 resume los resultados obtenidos del cálculo de la ADEV para las series de retornos y retornos absolutos, incluyendo los resultados para las versiones barajadas de ambas series. Como puede observarse, los resultados para los retornos medios  $\bar{r}_k[i]$  (gráfica 2(a)) son similares a los correspondientes a la serie barajada (gráfica 2(b)). Por otro lado, para los retornos absolutos  $\bar{\rho}_k[i]$  los resultados son diferentes entre intervalos de observación cortos (hasta diez días) y largos (mayores de diez días). Para todos los activos financieros estudiados, la ADEV para escalas de tiempo cortas exhibe un comportamiento que se desvía del correspondiente a datos descorrelacionados, los cuales muestran un decrecimiento lineal en el plano  $\log \sigma_y(\tau)$  vs.  $\log \tau$ , con una pendiente igual a  $-1/2$ .

Sin embargo, los valores de  $\sigma_y(\tau)$  para intervalos de observación grandes muestran un comportamiento significativamente diferente, el cual es distinto entre los activos estudiados. La gráfica 3 muestra un acercamiento de la gráfica 2(c) para una mejor visualización. Este comportamiento sugiere la presencia de un exponente de escalamiento diferente y en algunos casos una desviación al escalamiento. La tendencia creciente en  $\sigma_y(\tau)$  sugiere ya sea la presencia de correlaciones en los retornos absolutos o la presencia de rasgos de no estacionariedad en las series.



**Gráfica 2.** Resultados de la desviación de Allan para los (a) retornos y su versión barajada (b), y para los retornos absolutos (c) y su versión barajada (d).

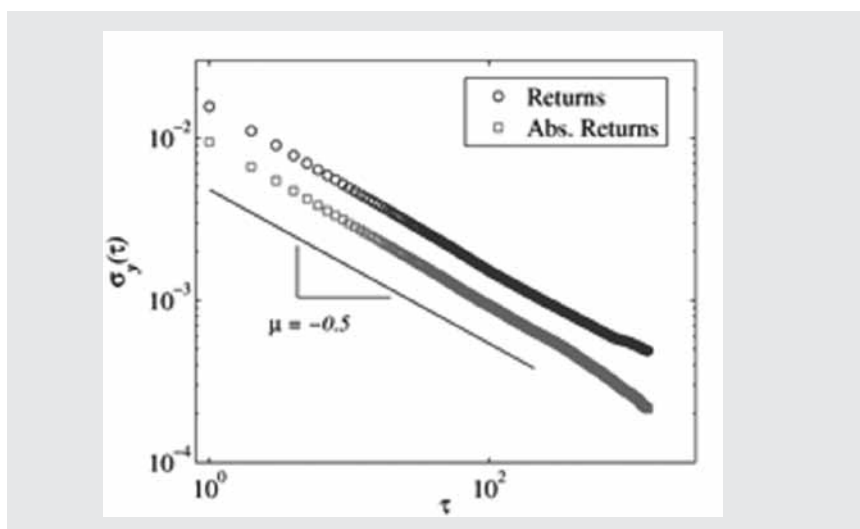


**Gráfica 3.** Desviación de Allan de los retornos absolutos (acercamiento de la gráfica 2(c)).

Para intervalos de observación cortos, las fluctuaciones tipo ruido blanco en las series de retornos absolutos son canceladas por el proceso de sua-

vización intrínseco a la definición de la desviación de Allan (ecuación 10). Por otro lado, para intervalos de observación grandes, se vuelve más notable la presencia de correlaciones de largo alcance y de deriva en los datos, lo cual ocasiona que se detenga el decrecimiento de la ADEV. Se observan también algunas desviaciones al escalamiento para estos intervalos, los cuales son significativos en el caso del WTI. En otras palabras, el comportamiento observado para escalas cortas indica que las fluctuaciones en los retornos absolutos es cercano al esperado para series tipo ruido blanco, mientras que para escalas grandes los rasgos de no estacionariedad dominan los resultados, la desviación de Allan ya no continúa decreciendo y se observa un comportamiento distinto entre los activos estudiados.

Como se observó anteriormente, los resultados de la ADEV para las series de retornos son cercanos a los esperados para una serie tipo ruido blanco, mientras que los resultados para los retornos absolutos observamos puntos de inflexión en las gráficas de la ADEV. Sin embargo, el cálculo de la ADEV para una serie de ruido blanco sintética ( $y[i]$ ) y su correspondiente valor absoluto ( $|y[i]|$ ) muestra que la desviación de Allan para ambas series es muy similar, como se muestra en la gráfica 4. Por lo tanto, para una serie de ruido blanco puro no se esperaría una diferencia significativa entre los resultados para la serie y para su valor absoluto, como se observa en los datos reales (gráfica 2(a) y (c)). Esto indica que las series de retornos no son carentes completamente de correlación, y que las desviaciones del escalamiento de los resultados de la ADEV para los retornos absolutos son un mero artefacto.



**Gráfica 4.** Desviación de Allan para una serie de retornos tipo ruido blanco (sintética) y su correspondiente serie de retornos absolutos. Cada punto representa el promedio de 25 realizaciones de series simuladas de ruido blanco.

Existen estudios previos acerca de la acumulación y de la presencia de correlaciones de largo alcance en la volatilidad (Pasquini y Serva, 2000). En el presente trabajo analizamos la serie del valor absoluto del retorno medio, el cual es diferente de la definición usual de retornos absolutos (Duan y Stanley, 2010), puesto que usamos el valor medio del retorno absoluto en un cierto intervalo de observación. Adicionalmente, estudios previos han reportado el multiescalamiento en los retornos absolutos (Pasquini y Serva, 1999; Pasquini y Serva, 2000), es decir, la presencia de un exponente de escalamiento que no es único. En nuestro trabajo, el concepto de multiescalamiento se amplía para incluir el cálculo de la desviación de Allan para diferentes intervalos de observación. Más aún, dichos estudios previos han reportado también que la varianza de los retornos acumulativos absolutos generalizados siguen una ley de potencia:  $VAR(\phi(L, \gamma)) \sim L^{-a(\gamma)}$ , que proporciona evidencia de comportamiento multiescala en la ley de potencia. El resultado de Pasquini y Serva (2010) acerca de que la varianza clásica para los retornos sigue la ley de potencia  $VAR(\phi(L, \gamma)) \sim L^{-1}$  se parece a los resultados esperados para la varianza de Allan de un ruido blanco y el exponente de escalamiento es el mismo para ambas varianzas, lo cual es de esperar porque la varianza de Allan para el ruido blanco coincide con la varianza clásica (Rutman, 1978).

## Conclusiones

En el presente trabajo analizamos series de precios de apertura de diferentes activos financieros usando la desviación de Allan, que fue desarrollada en la metrología de tiempo y frecuencia para el estudio de fluctuaciones en la frecuencia de un oscilador con el objetivo de caracterizar cuantitativamente la estabilidad de estándares de frecuencia. Observamos que para intervalos de observación cortos, del orden de hasta diez días, la ADEV muestra un comportamiento decreciente, mientras que en escalas mayores, para todos los activos estudiados, exhibe tendencias marcadamente diferentes entre los activos. Esto sugiere que la ADEV captura rasgos de las series de tiempo a diferentes escalas y sugiere, por lo tanto, diferentes dinámicas para los mercados en los cuales se intercambian los activos estudiados, lo que está en línea con estudios previos sobre el escalamiento en diferentes mercados (Di Matteo *et al.*, 2003; Liu *et al.*, 2008). Adicionalmente, notamos que para intervalos de observación largos (más de diez días) la acumulación y otros rasgos de no estacionariedad en la serie dominan los resultados, lo cual implica desviaciones respecto a la ley de escalamiento.

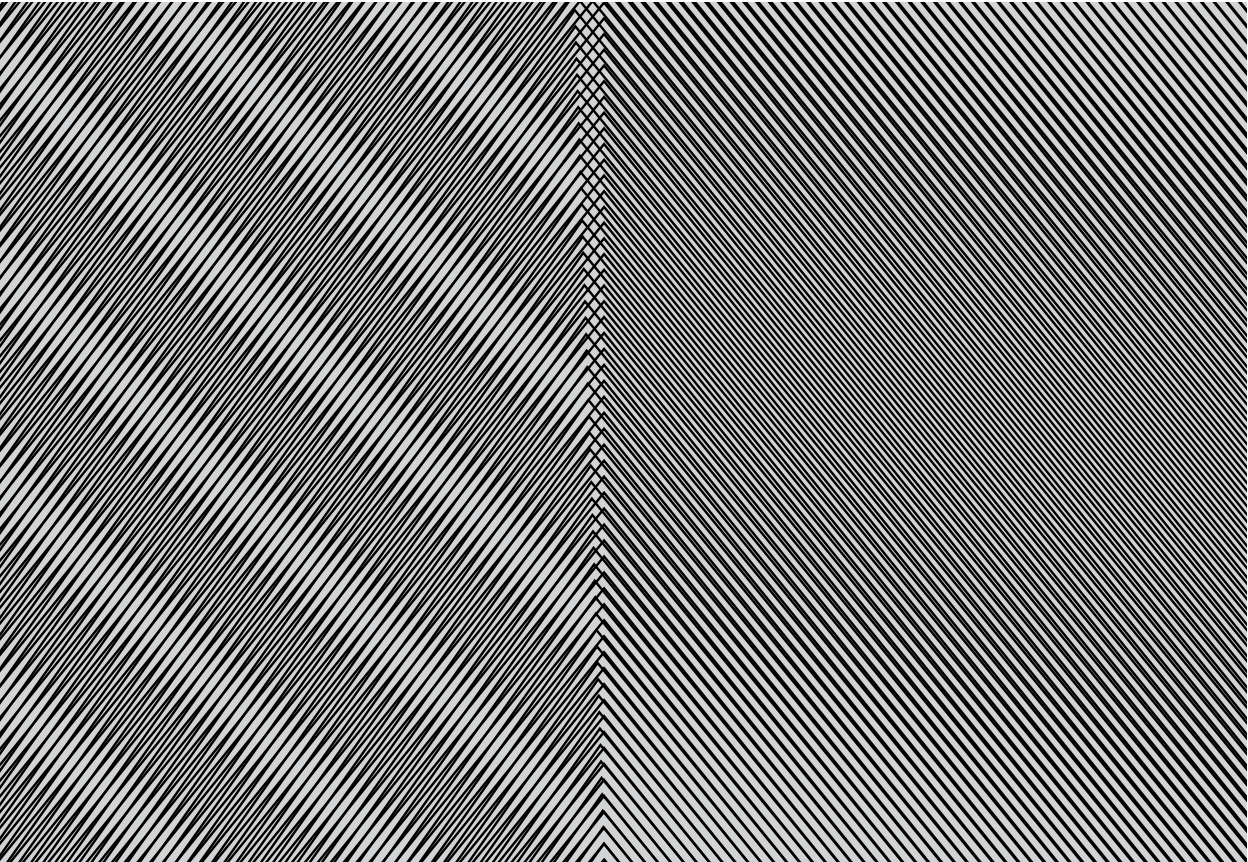
## Bibliografía

- Allan, D. W. (1987). Time and frequency (time-domain) characterization, estimation, and prediction of precision clocks and oscillators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, and Frequency Control*, 34(6), 647-654.
- Allan, D., Kartaschoff, P., Vanier, J., Vig, J., Winkler, G. M. R. y Yannoni, N. F. (1988). Standard terminology for fundamental frequency and time metrology. *Proceedings. 42nd Annual Frequency Control Symposium*, 419-425.
- Bouchaud, J. P. y Potters, M. (2000). *Theory of financial risks: From statistical physics to risk management*. UK: Cambridge University Press.
- Bregni, S. y Jmoda, L. (2008). Accurate estimation of the hurst parameter of long-range dependent traffic using modified Allan and Hadamard variances. *IEEE Transaction on Communication*, 56(11), 1900-1906.
- Di Matteo, T. (2007). Multi-scaling in finance. *Quantitative Finance*, 7(1), 21-36.
- Di Matteo, T., Aste, T. y Dacorogna, M. (2003). Scaling behaviors in differently developed markets. *Physica A*, 324(1-2), 183-188.

- Duan, W. Q., y Stanley, H. E. (2010). Volatility, irregularity, and predictable degree of accumulative return series. *Physical Review*, 81(066116), 1-9.
- Liu, R., Di Matteo, T. y Lux, T. (2008). Multifractality and long-range dependence of asset returns: The scaling behavior of the Markov-switching multifractal model with lognormal volatility components. *Advances in Complex System*, 11(5), 669-684.
- Mantegna, R. N. y Stanley, H. E. (2000). *An introduction to econophysics: Correlations and complexity in finance*. UK: Cambridge University Press.
- Pasquini, M. y Serva, M. (1999). Multiscale behaviour of volatility autocorrelations in a financial market. *Economics Letters*, 66(3), 275-279.
- Pasquini, M. y Serva, M. (2000). Cluster of volatility as a multiscale phenomenon. *European Physical Journal B*, 16, 195-201.
- Rutman, J. (1978). Characterization of phase and frequency instabilities in precision frequency sources: Fifteen years of progress. *Proceeding of the IEEE*, 66, 1048-1075.
- Voit, J. (2005). *Statistical mechanics of financial markets*. Berlin: Springer-Verlag.

Jesús Cuauhtémoc Téllez Gaytán  
Lucio Pat Fernández  
Facultad de Ciencias Económico Administrativas de la  
Universidad Autónoma del Carmen

# **Análisis por multirresolución de series de tiempo económico-financieras**



## Introducción

Cont (2001) describe los hechos estilizados que han caracterizado a series de tiempo económico-financieras, entre los cuales destacan los fenómenos de asimetría, gaussianidad agregativa, volatilidad cambiante y autocorrelación. El fenómeno de asimetría se refiere a que se observan grandes caídas pero no movimientos a la alza en los precios de acciones y valores de índices accionarios. El fenómeno de gaussianidad agregativa se refiere a que la distribución de los rendimientos se aproxima a una normal cuando aumenta la escala de tiempo, de otra manera la forma de la distribución no es la misma en diferentes escalas de tiempo. Un tercer fenómeno explica que medidas granulosas-gruesas de la volatilidad predicen de mejor manera la volatilidad en escalas finas que de manera contraria.

Los últimos dos fenómenos son descritos por Cont y Tankov (2003) de la siguiente forma:

...los precios se mueven esencialmente por brincos entre escalas de tiempo, aun siguen manifestando un comportamiento discontinuo hasta una escala mensual y únicamente después de una granulación-gruesa es que su comportamiento en escalas de tiempo mayores se obtiene algo que refleja un movimiento browniano.

Lo anterior tendría implicaciones en finanzas, y particularmente en la medición de riesgos, al tener que ajustar diferentes procesos estocásticos a los datos reales para diferentes horizontes de tiempo.

La caracterización temporal a la que se refieren los hechos estilizados arriba citados se ha podido estudiar aplicando la teoría de *wavelets*, cuya base principal es el análisis de Fourier, que únicamente analiza la señal en el dominio de las frecuencias. La flexibilidad de *wavelets* permite analizar simultáneamente las series de tiempo en el dominio de frecuencia y tiempo, las cuales son funciones que oscilan (*wave*) y decaen (*let*) a cierto número

de desvanecimientos. Se considera que éstas son filtros idóneos para descomponer una señal en diferentes niveles de resolución, método conocido como descomposición por multirresolución. El beneficio principal que ha tenido en disciplinas como geofísica, medicina y estadística es su capacidad para analizar fenómenos no estacionarios, temporales y de variación en el tiempo.

Las primeras aplicaciones de *wavelets* en finanzas y economía fueron realizadas por Ramsey y Lampart (1999), quienes analizan las relaciones entre variables macroeconómicas tales como ingreso, consumo, tasa de interés y agregados monetarios. En estudios posteriores, Lee (2004) analiza el comportamiento en los mercados accionarios de Estados Unidos y Corea; Fernández (2005) estima la beta de CAPM para países emergentes mediante la descomposición por multirresolución de los rendimientos accionarios y en cada nivel estima la varianza *wavelet* y el valor en riesgo (VAR). Norsworthy *et al.* (2000) y Xiong *et al.* (2005) también estiman la beta de CAPM para emisoras del S&P 500 y de la bolsa de valores de Shanghái, respectivamente.

Lai *et al.* (2006) estiman el riesgo de mercado de metales no férricos con base en un enfoque híbrido donde combinan *wavelets* y el modelo ARMA-GARCH. In y Kim (2006) estiman la razón de cobertura entre el índice S&P 500 y futuros del S&P 500 y concluyen que la correlación entre ambos mercados es cambiante en diferentes horizontes de tiempo pero permanece en niveles altos, y argumentan que la efectividad de la cobertura aumenta en la medida en que la escala de tiempo es mayor. En un estudio similar, Lien y Shresta (2007) estiman la razón de cobertura para 23 contratos de futuros sobre *commodities* y obtienen que la efectividad de la cobertura por *wavelets* mejora conforme aumenta el horizonte de tiempo.

En estudios más recientes, Rúa y Nunes (2009) analizan el comovimiento entre mercados accionarios de Alemania, Japón, Estados Unidos y el Reino Unido. Encuentran que el grado de comovimiento es más fuerte en frecuencias más bajas que en escalas de tiempo de más largo plazo, por lo que una estrategia de diversificación tendría poca importancia en el largo plazo respecto a plazos de menor duración.

Otras aplicaciones recientes de *wavelets* en el análisis de series de tiempo económicas han sido para probar la presencia de regresiones espurias y de cointegración, como lo hacen Kian y Weihong (2010), quienes analizan la relación del fenómeno de manchas solares con los precios del crudo a través

de la covarianza y correlación *wavelet*. Fan y Gencay (2010) analizan la presencia de raíz unitaria en procesos estocásticos aplicando la transformada *wavelet* discreta.

Este documento tiene por objetivo analizar el principal índice accionario de México a partir de la descomposición por multirresolución a través de *wavelets*, utilizando como filtro la función *wavelet* desarrollada por Daubechies en 1988, de mínima asimetría de longitud ocho (MA (8)). En cada nivel de resolución asociado a una escala de tiempo, se estiman los estadísticos descriptivos y la varianza *wavelet* con el propósito particular de identificar la presencia del fenómeno asimétrico de gaussianidad-agregativa. La importancia de este estudio consiste en analizar a detalle una serie de tiempo financiera e identificar particularidades respecto de lo que el análisis de una serie de tiempo en forma global no podría realizar.

---

## Teoría de *wavelets*

*Wavelets* son funciones de estructura especial descritas por funciones tipo base que se representan a través de aproximaciones sucesivas de series, similares a las series de Fourier que se representan por funciones seno y coseno. Las funciones *wavelets* (ondas cortas) tienen la propiedad de concentrar su energía en el tiempo para brindar un análisis de los fenómenos de temporalidad, no estacionariedad y variación en el tiempo (Burrus *et al.*, 1998: 1). La estructura especial de *wavelets* radica en que conservan su característica oscilatoria y la habilidad para permitir simultáneamente el análisis de tiempo y frecuencia, por lo que es posible procesar los datos en diferentes escalas y resoluciones; a diferencia del análisis de Fourier, donde la señal (serie de tiempo) procesada indica únicamente la cantidad de frecuencias y de energía que existe en cada frecuencia en la señal original pero no brinda información en donde una frecuencia en particular aparece en el dominio del tiempo. Al respecto, el análisis por *wavelets* es como mirar el bosque (ventana grande) para detectar las grandes particularidades y a la vez mirar los árboles (pequeñas ventanas) para detectar las pequeñas particularidades (Graps, 1995: 50).

Las funciones *wavelets* poseen dos propiedades que hacen conceptual y matemáticamente su construcción, admisibilidad y regularidad (Valens,

2004: 6-7). La propiedad de admisibilidad se refiere al término de *wave*, y consiste en que la transformada de Fourier de una función decaiga en la frecuencia cero; esto es, el valor promedio de una *wavelet* en el dominio del tiempo debe ser cero, por lo que la función es oscilatoria y, en consecuencia, representa una onda (*wave*). La condición de regularidad hace referencia al término *let* o decaimiento rápido, e implica que la función *wavelet* debe poseer suavización y concentración en el dominio del tiempo y frecuencia, por lo que la función *wavelet* tendrá  $N$  momentos de desvanecimiento u órdenes de aproximación. Por lo tanto, una *wavelet* es una función que oscila y decae a cierto número de desvanecimientos o aproximaciones.

La construcción de *wavelets* se basa en la dilatación ( $W(x) \rightarrow W(2x)$ ) y translación ( $W(2x) \rightarrow W(2x - 1)$ ) de una función; si la dilatación y translación se hacen en forma infinita, se tendría la familia de funciones base  $W_{jk}(x) = W(2^j x - k)$  en  $L^2[0, 1]$  que, junto con una función de escala  $\phi(x)$ , representaría la construcción de una *wavelet*, donde  $j \geq 0$  y  $0 \leq k \leq 2^j$ . Además, el producto interno de  $\int \phi(x)W(x)dx$  es cero, y se tiene como resultado la propiedad de ortogonalidad mutua entre las dilataciones y translaciones de  $W$ . Lo anterior representa la importancia de *wavelets* para analizar series de tiempo en diferentes escalas y frecuencias a través del tiempo, esto es, la descomposición de la serie para analizar a detalle sus características y su reconstrucción (síntesis) para obtener la señal original.

Una de las principales bases en *wavelets* es el análisis de frecuencias desarrolladas por Fourier, el cual establece que una señal periódica  $f(x)$  con periodo fundamental  $L$  puede expresarse como la suma de términos seno y coseno de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[ a_r \cos \frac{2\pi r x}{L} + b_r \sin \frac{2\pi r x}{L} \right], \quad -\infty < x < +\infty \quad (1)$$

donde  $a_0$ ,  $a_r$  y  $b_r$  son número reales y  $2\pi/L$  es la frecuencia fundamental o angular comúnmente representada por  $\omega$ <sup>1</sup> y los coeficientes  $a_r$  y  $b_r$  se definen de la forma

<sup>1</sup>  $w = 2\pi/L = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia de la señal y mide el número de ciclos por unidad de tiempo. Por ejemplo, una corriente eléctrica de 60 Hz indica que la onda seno pasa 60 veces por el mismo punto en un segundo.

$$a_r = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$b_r = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx. \quad r = 1, 2, \dots \quad (3)$$

El caso particular identificado por Fourier fue  $L = 2\pi$ .

Las series de Fourier son una representación particular de funciones definidas en un intervalo finito y en un solo periodo, por lo que el caso general es considerado a través de la transformada de Fourier, que puede representar una función en términos de la superposición de términos sinusoidales sobre un intervalo infinito y sin una periodicidad en particular. La función principal de la transformada de Fourier es medir el contenido de frecuencia de una señal, información que no es fácil detectar en el dominio de tiempo de la señal original, y comúnmente las señales presentan más de un componente de frecuencia. La transformada de Fourier se representa de la siguiente forma:

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{f}_T(\omega_r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (4)$$

donde

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5)$$

es la integral de Fourier.

En sí, la transformada de Fourier es el proceso de transformar la función  $f = (t)$  en el dominio del tiempo en la misma función  $\hat{f}(\omega)$ , pero en el dominio de frecuencia, y se expresa como  $\mathfrak{F}\{f(t)\}$ ; y al proceso inverso de regresar  $f(t)$  a partir de  $\hat{f}(\omega)$  se le conoce como transformada inversa de Fourier,  $\mathfrak{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup> La importancia de transformar una función es la posibilidad de obtener mayor información de la misma respecto de aquella disponible en la señal original.

El segundo antecedente radicó en expresar una función  $x(t)$  a través de funciones base con cambio de escala, esto es, migración del análisis de frecuencia al análisis de escala (Graps, 1995: 52):

1. *Funciones base.* Un vector de dos dimensiones  $(x,y)$  es el resultado de la combinación de los vectores  $(1,0)$  y  $(0,1)$ , llamados vectores base, ya que al multiplicar  $x$  por  $(1,0)$  da como resultado el vector  $(x,0)$ , y  $y$  por el vector  $(0,1)$  resulta en el vector  $(0,y)$ . Por lo tanto, la suma de ambos vectores,  $(x,0)$  y  $(0,y)$ , tiene como resultado el vector  $(x,y)$ , donde la propiedad valorable en los vectores base es que son perpendiculares u ortogonales uno al otro. En términos de una función  $f(x)$ , ésta puede representarse mediante las funciones base seno y coseno, y se debe cumplir que sean ortogonales a través de una combinación apropiada entre ellas por la que el producto interno de las respectivas funciones sea cero.
2. *Cambio de escala.* Una función base cambia en escala “cortando en pedazos” dicha función en diferentes tamaños de escala. Ejemplo de ello: sea una señal en el dominio de 0 a 1, la cual puede dividirse en funciones de dos etapas con rango de 0 a  $\frac{1}{2}$  y de  $\frac{1}{2}$  a 1. Posteriormente se vuelve a dividir la señal original en funciones de cuatro etapas de 0 a  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$  a  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{3}{4}$  y de  $\frac{3}{4}$  a 1. Por lo tanto, cada conjunto de representaciones codifica la señal original en una escala o resolución particular.

Finalmente, el tercer antecedente se refiere a la concentración de energía de una función  $f(x)$ , la cual se expresa de la forma:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \quad (6)$$

y se encuentra relacionada con el teorema de Parseval referente a la ley de la conservación, en donde el total de energía de una onda es la suma de todos los componentes de Fourier.

La característica principal de la transformada de Fourier es que representa una función compleja por medio de la suma ponderada de funciones simples que, a la vez, se obtienen a partir de una función más simple conocida como prototipo o función base. Su principal ventaja es que tiene una representación de soporte compacto perfecto en el dominio de la frecuencia, es decir, es capaz de representar perfectamente el contenido espectral de

una señal, pero no tiene alguna indicación de su localización en el tiempo.<sup>3</sup> Dada esta situación, la transformada de Fourier no es capaz de representar señales cuyo contenido espectral cambia a través del tiempo (señales no estacionarias).

La modificación que sufrió entonces la transformada de Fourier para que representara señales no estacionarias fue desarrollada por Gabor al establecer la transformada de Fourier de corto tiempo (TFCT). La TFCT trabaja segmentando la señal mediante una función ventana localizable en el tiempo y posteriormente analiza cada segmento de la señal. Sin embargo, la ventana que utiliza la TFCT es la misma para analizar toda la señal, lo cual hace inadecuado su uso para analizar señales con componentes de frecuencia muy alta pero con periodos de tiempo muy cortos, y componentes de frecuencia muy baja pero con periodos de tiempo muy largos.

La TFCT trabaja removiendo aquella porción de la señal deseada, y posteriormente se aplica la transformada de Fourier a dicha porción. Para ello se requiere una función conocida como ventana, a través de la cual es posible remover la porción deseada de la señal, por lo que a la TFCT también se le conoce como *transformada de Fourier ventaneada*; donde una función ventana es aquella valuada en los reales,  $\phi(t) \in L^2(\mathfrak{R})$ , cuya finalidad es remover alguna porción de la señal original, esto es, la convolución de la señal original con la función ventana,  $f(t)\phi(t-b) =: f_b(t)$ . El resultado es la información contenida de  $f(t)$  en la vecindad de  $t=b$ , donde el valor de la convolución será cero fuera del intervalo deseado y  $b$  representa la magnitud con la cual es posible desplazar la función ventana sobre el eje del tiempo.

Contra lo que sucede con la TFCT, la transformada *wavelet* permite el análisis en tiempo-frecuencia ya que trabaja con una función ventana-cambiante, que representa la convolución de una función *wavelet* con la señal original, donde la función *wavelet* dependerá de dos parámetros: 1) traslación (localización), el cual representa el movimiento de la función *wavelet* sobre el eje del tiempo, y 2) dilatación, el que permite la expansión y contracción de la función *wavelet* y a través del cual se pueden capturar las frecuencias (altas o bajas) de la señal original. Lo anterior hace que la trans-

<sup>3</sup> Un conjunto  $S$  es compacto si, de cualquier secuencia de elementos  $X_1, X_2, \dots$  de  $S$ , es posible extraer siempre una subsecuencia que tiene a algún elemento límite de  $X$  en  $S$ ; los conjuntos compactos son, por lo tanto, cerrados y limitados.

formada *wavelet* sea flexible para el análisis en el dominio tiempo-frecuencia de señales (series de tiempo) en el contexto de no estacionariedad.

La transformada *wavelet* trabaja en dirección opuesta a la TFCT, primeramente descompone la señal original en bandas de frecuencia y después la analiza a través del tiempo:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \psi * \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (7)$$

y la señal original se puede reconstruir (transformada *wavelet* inversa) de la forma:

$$f(t) = \frac{C_\psi}{a^2} \int_{a>0} \int_b W(a, b) \psi * \left( \frac{t-b}{a} \right) da db, \quad (8)$$

donde  $a > 0$  y  $b$  son los parámetros de dilatación y localización, respectivamente;  $\psi$  es la *wavelet* madre,  $C_\psi$  es una constante que depende de  $\psi$  y  $W(a, b)$  es la transformada *wavelet* continua (TWC). Así mismo, la transformada *wavelet* se puede representar como el producto interno:

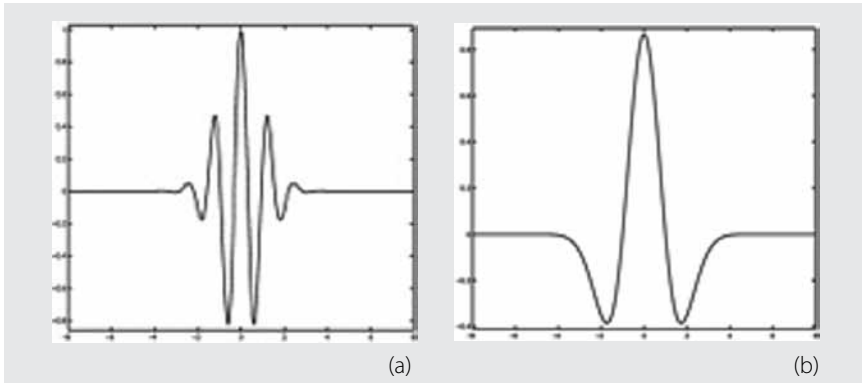
$$W(a, b) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle, \quad (9)$$

Dos funciones *wavelet* continuas comunes, cuyas representaciones se muestran en la gráfica 1, son:

$$\psi^M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (10)$$

conocida como *wavelet* Morlet, donde  $i = \sqrt{-1}$  es un número imaginario y  $\omega_0$  es la frecuencia central de la *wavelet*; y

$$\psi(t) = (1 - t^2) e^{-t^2/2}, \quad (11)$$



**Gráfica 1.** Función *wavelet* (a) de Morlet y (b) sombrero mexicano

conocida como *wavelet sombrero mexicano*, que representa la segunda derivada de la función de distribución gaussiana,  $e^{-t^2/2}$ , con varianza unitaria y factor de normalización  $1/\sqrt{2\pi}$ .

## Transformada *wavelet* discreta

La transformada *wavelet* continua es una función que depende de dos parámetros continuos, lo cual da como resultado información redundante, esto es, un número variante de coeficientes con un número reducido de escalas. Dicho problema es resuelto discretizando los parámetros  $a$  y  $b$  a través del análisis por multirresolución (Mallat, 1989: 676-677, 681), en el cual se aplican iterativamente filtros de alto y bajo paso y, subsecuentemente, se muestrean en forma de cascada. El anterior proceso tiene como resultado la transformada *wavelet* discreta (TWD).

El proceso de filtración de las observaciones  $x_t$  de una serie de tiempo a través de las funciones *wavelets* o identificadas como filtros de alto y bajo paso, se puede representar como

$$x_t \rightarrow H(\omega) \rightarrow u_{j,t}, \quad (12)$$

donde

$$H(\omega) = \prod_{j=1}^J H_j(\omega), \quad (13)$$

es la función transferencia del filtro  $h_p$  y  $u_{j,t}$  es la convolución de  $x_t$  con  $h_t$ .

En general, al proceso de filtración de una señal a través de filtros de alto- y bajo-paso se le conoce como descomposición por multirresolución. En particular, cuando la filtración es vía la TWD se le conoce como representación *wavelet* de la descomposición por multirresolución, la cual sirve tanto para descomponer una señal en diferentes escalas como en la reconstrucción de la misma (Mallat, 1989: 681-682).

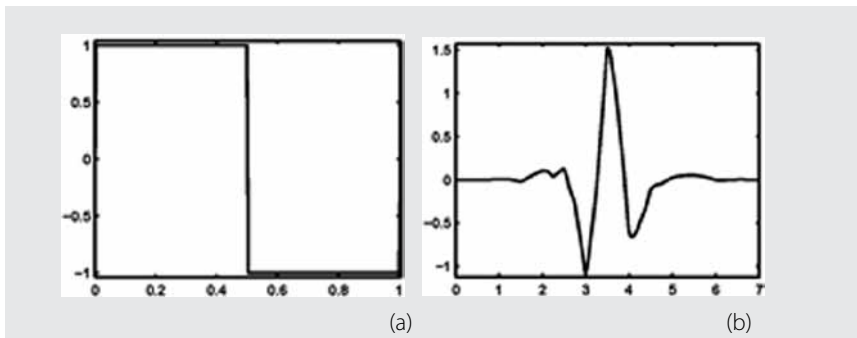
Ejemplos comunes de filtros *wavelet* discretos se refieren a las funciones de Haar y de Daubechies. El primero se refiere a un filtro de longitud  $L = 2$  y es definido por filtros de escalamiento de la forma

$$g_0 = g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (14)$$

equivalente a filtros de alto-paso

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y \quad h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

En la gráfica 2 se muestra la representación de la función *wavelet* de Haar y de Daubechies, la primera tiene la característica principal de ser el único filtro ortonormal de soporte compacto simétrico. Sin embargo, es poco usual en aplicaciones reales ya que es una aproximación pobre a un filtro ideal de pase de banda.



**Gráfica 2.** Función *wavelet* (a) de Haar y (b) de Daubechies

El segundo ejemplo de filtro discreto, *wavelet* de Daubechies, se refiere a una función de soporte compacto con un número máximo de momentos de decaimiento para la cual no existe una forma explícita de representar este tipo de filtros. Daubechies (1988: 914-921) mostró que cuando los parámetros  $a$  (dilatación) y  $b$  (traslación) de una función *wavelet* se representan de la forma  $2^j$  y  $k2^j$ , respectivamente, es posible construir funciones base ortonormales de *wavelets* con soporte compacto. Por consiguiente, la integral en (7) se vuelve

$$W(k2^{-j}, 2^{-j}) = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt, \quad (16)$$

la cual se aproxima de la forma

$$W(k2^{-j}, 2^{-j}) \approx 2^{j/2} \sum_n f(n) \psi(2^j n - k). \quad (17)$$

Dado lo anterior, es posible representar la secuencia de funciones *wavelet* (madre) y de escalamiento (padre),  $\psi$  y  $\phi$ , respectivamente, de la forma

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k) = 2^{-j/2} \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right), \quad (18)$$

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j} t - k) = 2^{-j/2} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right). \quad (19)$$

Por lo tanto, una función  $f(t)$  se representará de la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k S_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(t) \\ &+ \dots + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t), \end{aligned} \quad (20)$$

donde los coeficientes  $S_{j,k}$  y  $d_{j,k}, \dots, d_{1,k}$ , son los coeficientes de la transformada *wavelet* contenidos en  $W$ , los cuales miden la contribución de la función *wavelet* en la señal original. Los coeficientes  $S_{j,k}$  son los coeficientes de suavización y representan el comportamiento suave implícito en la señal a

escalas gruesas (no refinadas),  $2^j$ ;  $d_{j,k}$  son los coeficientes de detalle también conocidos como cristales, los cuales representan las desviaciones del comportamiento suave, donde  $d_{j,k}$  describe las desviaciones en la escala gruesa y  $d_{j-1,k}, \dots, d_{1,k}$  son las desviaciones a escalas finas.

En conclusión, la función  $f(t)$  podrá representarse en términos de su *serie de detalles* en diferentes resoluciones

$$D_j(t) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \text{ para } j = 1, 2, \dots, J. \quad (21)$$

y variaciones suaves

$$S_j(t) = \sum_k s_{j,k} \phi_{j,k}(t), \quad (22)$$

teniendo como resultado

$$f(t) = S_j(t) + D_j(t) + D_{j-1}(t) + \dots + D_1(t), \quad (23)$$

lo cual es descrito igualmente como *análisis por multirresolución*.

## Transformada *wavelet* discreta de máximo traslape (TWDMT)

La TWDMT es una versión modificada no diezmada de la transformada *wavelet* discreta, la cual trabaja sobre cualquier tamaño de muestra  $N$  sin limitarse a una longitud diádica de observaciones como la TWD. Lo anterior hace que la TWDMT no sea sensible al punto inicial de la serie de tiempo, lo que se logra eliminando el método de submuestreo al aplicar doblemente el algoritmo piramidal de la TWD, tomando aquellos resultados descartados del filtro TWD vía filtración circularmente desplazada.

Las diferencias entre la TWD y la TWDMT se enumeran a continuación:

1. La TWDMT de orden  $J$ -ésimo se define adecuadamente para una muestra de tamaño  $N$ , mientras que la TWD se restringe a una muestra de tamaño diádica  $2^j$ .

2. Los coeficientes de detalle y suavización vía TWDMT se asocian a filtros de fase cero, lo cual significa que es posible alinear eventos de la serie de tiempo original con las características del análisis por multirresolución.
3. La TWDMT es invariante en desplazamientos, lo cual significa que desplazando circularmente la serie de tiempo en cualquier monto, la TWDMT se desplazará igualmente en forma circular en el mismo monto.

La TWDMT desarrolla un análisis de la varianza con estimadores asintóticamente más eficientes que la TWD.

## Resultados

En este documento se utilizan precios de cierre ajustados por pago de derechos del principal índice accionario de México (IPC) con periodicidad diaria, los cuales se transforman en rendimientos logarítmicos de la forma:

$$Ret_t = 1n \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad (24)$$

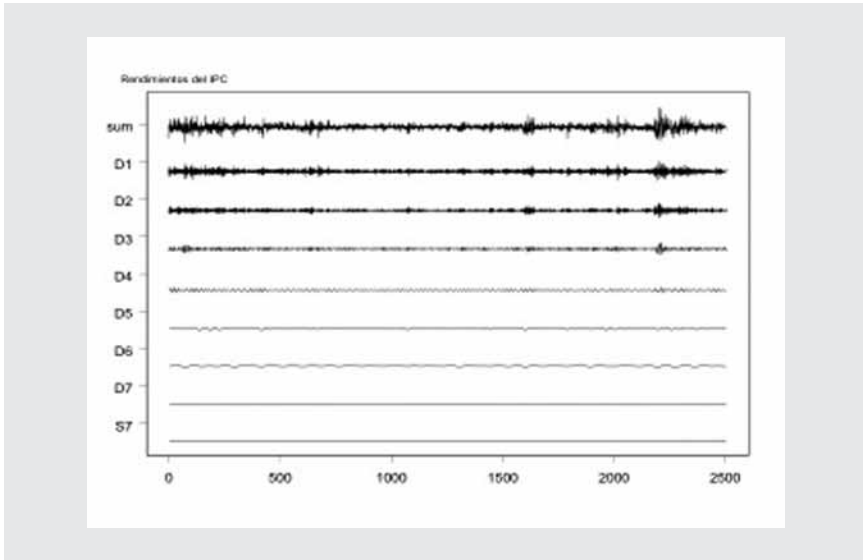
La muestra consiste en 2,506 observaciones durante el periodo que comprende del 3 de enero de 2000 al 31 de diciembre de 2009, los datos se obtuvieron de Reuters. El análisis por *wavelets* se desarrolló utilizando el *software* S-Plus versión 8.0.

En la tabla 1 se encuentran los estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos, donde se observa que en el periodo de estudio el IPC ha ofrecido en promedio un rendimiento diario positivo. En un día de operación, el IPC mostró variabilidad fuerte al registrarse un rendimiento máximo de 10.44% y mínimo de -8.27%; lo cual, comparado con el rendimiento promedio de 0.0604%, refleja la presencia de valores extremos y da pie a que el mercado accionario presente un comportamiento del tipo leptocúrtico o de colas pesadas, fenómeno explicado también por la presencia de volatilidad condicionada y agrupada (Ruppert, 2004: 372). Así mismo, el sesgo muestra que el IPC ha experimentado más rendimientos extremos positivos que negativos, fenómeno que puede capturarse mediante modelos estocásticos con implicaciones en la cuantificación del riesgo. La prueba de Jarque-Bera, a un nivel de significancia del 0.05, permite rechazar la hipó-

tesis nula de normalidad en los rendimientos diarios, dato que se sustenta igualmente con el valor de curtosis mayor de tres.

Media	0.000604
Máximo	0.104407
Mínimo	-0.082673
Desviación estándar	0.015455
Sesgo	0.059053
Curtosis	6.870680
Jarque-Bera (JB)	1564.5940
Probabilidad (JB)	0.000000

La gráfica 3 muestra la descomposición por multirresolución (DMR) con base en la ecuación (27) en siete niveles de resolución, también conocidos en la teoría de *wavelets* como cristales o detalles, cuya descomposición se realizó a través de la función de Daubechies de mínima asimetría MA (8). Cada detalle  $D_j$  está relacionado con una escala de tiempo diferente: el primer detalle o nivel de resolución  $D_1$  captura los componentes de frecuencias más altas de los rendimientos del IPC que ocurren en el horizonte de tiempo más corto entre  $\lambda_1 = 2^{j-1} = 2^0 = 1$  y 2 días. El siguiente nivel  $D_2$  muestra los componentes de frecuencia menores que los del nivel  $D_1$  que ocurren en una escala de tiempo  $\lambda_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$  a 4 días. Así sucesivamente hasta el nivel  $D_7$  ( $\lambda_7 = 2^{7-1} = 2^6 = 64$  a 128 días) y finalmente el nivel  $S_7$ , que muestra el componente de suavización que integra los componentes con las frecuencias más bajas en escalas de tiempo mayores que  $\lambda_7 = 2^7 = 128$  días.



**Gráfica 3.** Descomposición por multirresolución de los rendimientos del IPC en siete niveles

Una herramienta funcional en el análisis por *wavelets* para determinar el número de niveles necesarios para descomponer una señal se refiere a la distribución de energía, la cual muestra la contribución que cada nivel de resolución representa de la señal original. En la tabla 2 se muestra el porcentaje que cada nivel de resolución captura de la serie de tiempo de los rendimientos del IPC.

Tabla 2. Distribución de energía de la DMR de los rendimientos del IPC								
Cristal	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7
Energía (%)	43.549	28.32	15.261	6.416	2.954	1.902	0.679	0.918

Se aprecia que el nivel  $D_1$  acumula el 43% y es suficiente hasta un nivel de resolución  $D_7$ , ya que hasta ese detalle la concentración de energía ha llegado al 99%.

En la tabla 3 se muestran los estadísticos descriptivos para cada nivel de resolución, en ella se aprecia que en escalas mayores de tiempo la distribu-

ción de probabilidad de los rendimientos del IPC converge a una normal.<sup>4</sup> Se observa, a través del sesgo en cada uno de los niveles de resolución, que el mercado accionario ha ofrecido más rendimientos positivos que negativos en horizontes de tiempo de muy inmediato plazo, comparado con horizontes mayores de 16 días, donde la rentabilidad del mercado ha sido más negativa que positiva. Igualmente, se observa que el valor de curtosis disminuye para escalas con mayor duración de tiempo, aunque en el nivel  $D_3$ , equivalente a una duración de tiempo entre 4 y 8 días, es donde se presenta el mayor valor del respectivo estadístico.

Dado que un valor alto de curtosis es resultado de valores extremos y la presencia de éstos se debe al fenómeno de volatilidad condicionada no constante (Ruppert, 2004: 372), el hecho de registrarlo en una duración de tiempo de cuatro a ocho días se puede explicar como un comportamiento del mercado de realizar grandes liquidaciones de sus activos en dicho horizonte de tiempo posterior a una tenencia de cuatro días. Lo anterior se realiza con el propósito de rebalancear los portafolios y tomar utilidades, lo que hace que los precios de los activos registren cambios más bruscos (valores extremos) respecto a otros horizontes de tiempo. Obsérvese que en escalas de tiempo mayor, el valor de curtosis es más bajo, lo cual refleja una posición más conservadora del mercado en el largo plazo, esto es, en un horizonte de largo plazo se observa una administración pasiva respecto a plazos inmediatos caracterizados por una administración más activa de las carteras.

Por lo anterior, junto con la prueba de normalidad cuyo valor de Jarque-Bera disminuye para horizontes de mayor duración de tiempo, se sustenta el argumento en que la distribución de los rendimientos del mercado accionario converge a una normal en escalas de tiempo mayores. Aunque este hecho podría invalidarse por el resultado mostrado en la escala  $D_6$ , en general se observa el fenómeno de gaussianidad-agregativa.

<sup>4</sup> Los valores que se obtienen en cada nivel corresponden a valores reescalados de la señal original debido al mismo proceso de filtración o convolución de la serie de tiempo con la función *wavelet* utilizada como filtro.



El comportamiento del IPC que se observa, dados los resultados en diferentes escalas de tiempo, se clasifica como fenómeno de asimetría en el conjunto de hechos estilizados que han caracterizado a los rendimientos de activos financieros (Cont, 2001: 224). De igual manera, Cont y Tankov (2003) se refieren a estos fenómenos, en particular al de gaussianidad-agregativa, argumentando que los precios se caracterizan por brincos en escalas de tiempo menores pero a mayores escalas reflejan un comportamiento browniano.

En el anexo B se muestran los gráficos cuantil-cuantil de los rendimientos del IPC descompuesto en los siete niveles de resolución, en donde se observa que en escalas menores de tiempo asociadas a las frecuencias más altas de la serie de tiempo el comportamiento de los rendimientos es más de tipo leptocúrtico o de colas pesadas. En la medida en que la escala de tiempo aumenta o las frecuencias disminuyen, el comportamiento de los rendimientos se aproxima en mejor manera a una distribución tipo normal.

## Varianza *wavelet*

La estimación de la varianza se fundamenta en el principio de conservación de energía de *wavelets*, en que la ortonormalidad de la matriz  $\Omega$ , esto es,  $W = \Omega X$  se pueda reconstruir  $X = \Omega^T W$ , implica que la TWD sea una transformada que preserve la energía tal que  $\|W\|^2 = \|X\|^2$ . En consecuencia, la varianza de un proceso estocástico podrá descomponerse de la forma:

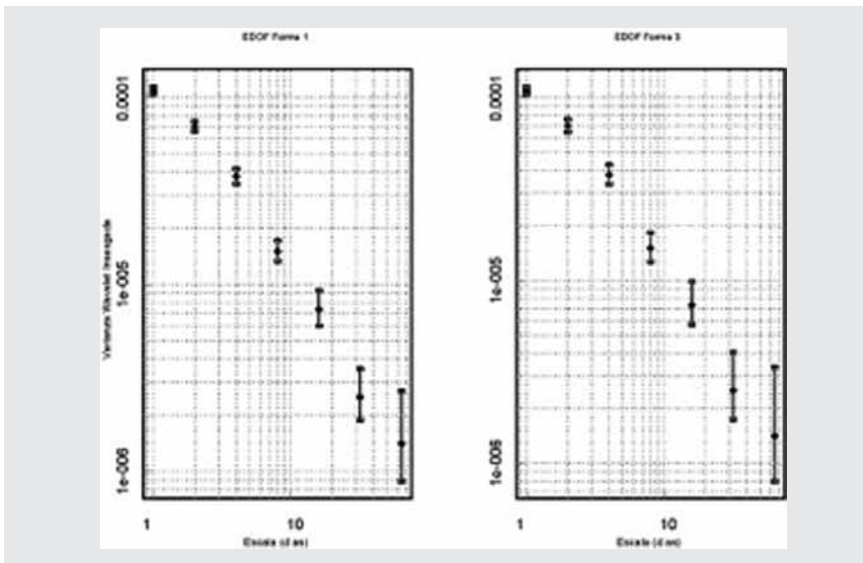
$$\hat{\sigma}_x^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} (X_t - \bar{X})^2 = \frac{1}{N} \|W\|^2 - X^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|W_j\|^2 + \frac{1}{N} \|V_j\|^2 - X^2, \quad (25)$$

donde  $\hat{\sigma}_x^2$  es la varianza muestral de  $X$  y  $\bar{X} = (1/N) \sum X_t$  es la media muestral. A partir de (29), el estimador insesgado de la varianza *wavelet* se representa como

$$\hat{\hat{\sigma}}_x^2(\lambda_j) \equiv \frac{1}{2\lambda_j \hat{N}_j} \sum_{t=L_j}^{N_j-1} W_{j,t}^2, \quad (26)$$

donde  $N_j = N/2^j$ ,  $\hat{N}_j = N_j - L'_j$  y  $L'_j = [(L - 2)(1 - 2^{-j})]^5$

La gráfica 4 muestra la descomposición de la varianza con base en la ecuación (26), que se obtiene a partir de la descomposición por multirresolución de los rendimientos del IPC vía la TWDMT. Se observa que la varianza disminuye en escalas de tiempo mayores, lo cual puede interpretarse como una disminución del riesgo en horizontes de tiempo de largo plazo. En la respectiva figura, “EDOF forma 1” se refiere a los grados de libertad equivalentes que se estiman cuando la muestra es grande y “EDOF forma 3” hace referencia a los grados de libertad cuando también la muestra es grande pero la varianza muestral es desconocida.



**Gráfica 4.** Descomposición de la varianza en siete niveles de resolución

La importancia de descomponer la varianza en diferentes niveles de resolución asociados a escalas de tiempo recae en la definición de valor en riesgo al preguntar por la pérdida máxima esperada dado un nivel de confianza en un horizonte de tiempo. Por ello al descomponer una serie en escalas de tiempo se observa que las pérdidas potenciales son mayo-

<sup>5</sup> Donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa el mínimo de dos cantidades. Véase Serroukh *et al.* (2000) para un desarrollo a detalle de la varianza *wavelet*.

res en horizontes de tiempo de corta duración que en aquellas en que las frecuencias son menores en escalas de tiempo mayores. Por lo tanto, las frecuencias más altas, y que ocurren en escalas menores, serán las de mayor contribución marginal a la pérdida total esperada (Fernández, 2005: 16).

## Conclusiones

Uno de los beneficios de aplicar el análisis por *wavelets*, en particular la descomposición por multirresolución de una serie de tiempo, se basa en la habilidad para analizar fenómenos de temporalidad, no estacionariedad y variación en el tiempo, fenómenos que han caracterizado a las series de tiempo financieras. Lo anterior hace que a través de este enfoque, y contrario al análisis de Fourier, sea posible capturar los componentes de frecuencias más altas que ocurren en horizontes de tiempo de menor duración y componentes de frecuencias más bajas que ocurren en horizontes de tiempo de mayor duración.

En este documento se aplicó la descomposición por multirresolución vía la TWDMT y como principal filtro la función de Daubechies de mínima asimetría (MA) de longitud 8, también conocida en la literatura de *wavelets* como *symmlet S8*; lo anterior se justifica por sus propiedades y propósitos prácticos (Härdle *et al.*, 1998: 65-67). Los resultados mostraron un nivel de resolución de hasta siete detalles, la presencia del fenómeno asimétrico identificado como gaussianidad-agregativa, en donde la distribución de los rendimientos del IPC no es la misma en las diferentes escalas de tiempo. Se identificó que en escalas menores la distribución de los rendimientos se aproxima en mejor forma a una distribución *t* de Student y en escalas mayores la distribución se ajusta en mejor forma a una normal.

Así mismo, se observó a través del estadístico sesgo que el mercado accionario ha generado mayores rentabilidades positivas en el inmediato plazo que en plazos mayores al obtenerse un valor negativo del sesgo en escalas de tiempo mayores de 16 días. Complementando el análisis con el valor de curtosis, se tiene que en escalas de tiempo de menor duración el mercado accionario mexicano es descrito con un comportamiento de tipo extremo donde la presencia de movimientos bruscos ha dominado al mercado accionario. En contraste, para escalas de tiempo de mayor duración los cambios en pre-

cios son menos abruptos, lo cual se refleja en un valor de curtosis cercano a tres, esto es, un mercado accionario descrito mayormente como normal.

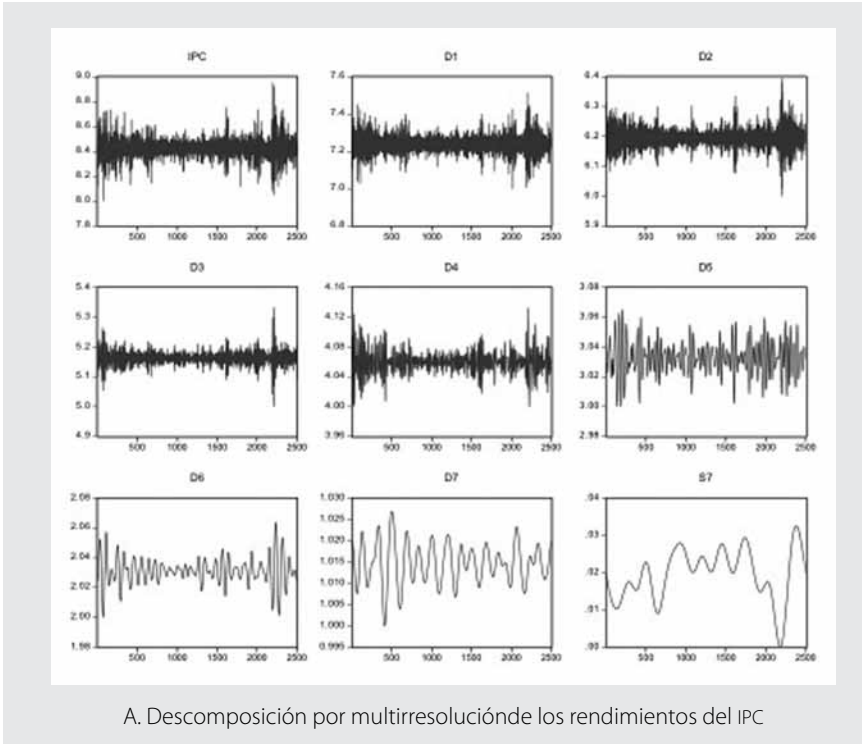
La aplicación de *wavelets* en este documento se limitó a mostrar evidencia particular del fenómeno de gaussianidad-agregativa, aunque es igualmente factible emplear el enfoque para validar el hecho estilizado en que la volatilidad en escalas gruesas predice de mejor manera la volatilidad en escalas finas (Cont, 2001: 224). Así mismo, se puede extender la investigación para probar la presencia de raíz unitaria como lo hacen Fen y Gencay (2010).

## Bibliografía

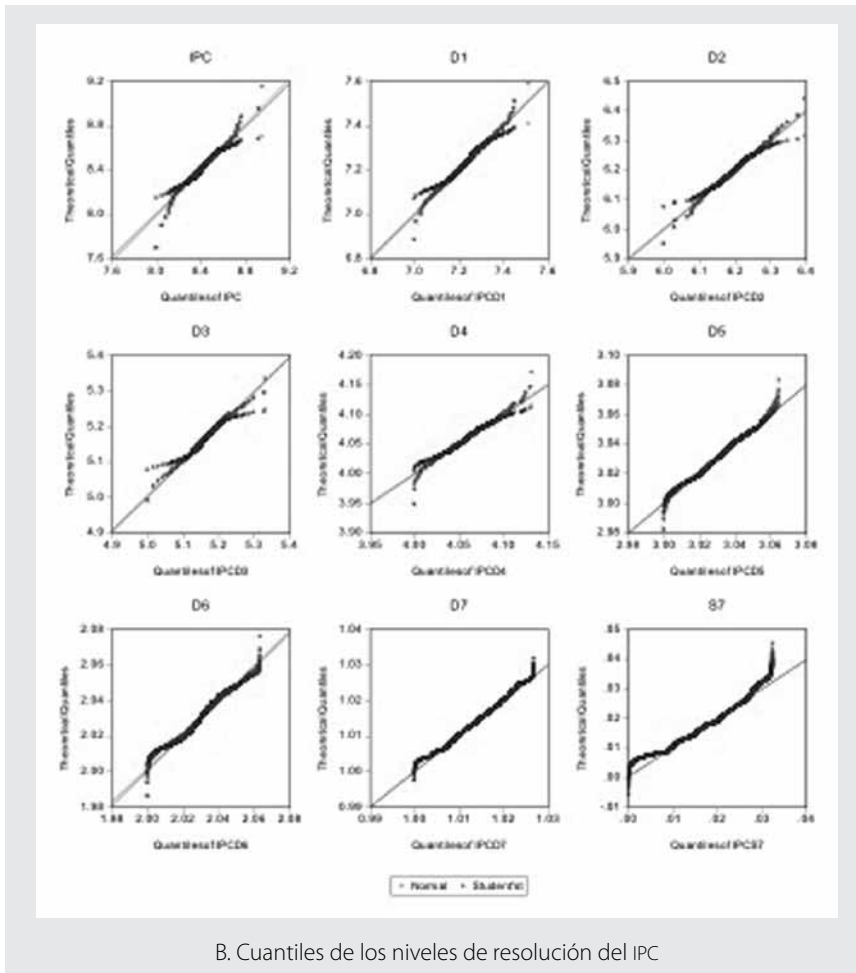
- Burrus Sidney, C., Gopinath, R. y Guo, H. (1998). *Introduction to wavelets and wavelet transforms: A primer* New Jersey: Prentice Hall.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 223-236.
- Cont, R. y Tankov, P. (2003). *Financial modelling with jump processes*. London: Chapman & Hall.
- Daubechies, I. (1988). *Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Communications on pure and applied mathematics*. USA: John Wiley & Sons.
- Fan, Y. y Gencay, R. (2010). Unit root tests with wavelets. *Econometric Theory*, inédito.
- Fernández, V. (2005). The intertemporal CAPM and a wavelet-based decomposition of value at risk. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 9(4), 1-35.
- Graps, A. (1995). An introduction to wavelets. *IEEE Proceedings Computational Science and Engineering*, 2, 50-61.
- Härdle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D. y Tsybakov, A. (1997). Wavelets, approximation and statistical applications. *Lecture Notes in Statistics*, 129.
- In, F. y Kim, S. (2006). The hedge ratio and the empirical relationship between the stock and futures markets: A new approach using wavelets analysis. *Journal of Business*, 79(2), 799-820.
- Kian, C. y Huang, W. (2010). Testing for spurious and cointegrated regressions: A wavelet approach. *Journal of Applied Statistics*, 37(2), 215-233.
- Lee, H. S. (2004). International transmission of stock market movements: A wavelet analysis. *Applied Economics Letters*, 11(3), 197-201.

- Lien, D. y Shrestha, K. (2007). An empirical analysis of the relationship between hedge ratio and hedge horizon using wavelet analysis. *The Journal of Futures Markets*, 27(2), 127-150.
- Mallat, S. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, 674-693.
- Norsworthy, J., Li, D. y Gorener, R. (2000). Wavelet-based analysis of time series: An export from engineering to finance. *IEEE Proceeding Engineering Management Society*, 126-132.
- Ramsey, J. y Lampart, C. (1999). The decomposition of economic relationships by time scale using wavelets: Expenditure and income. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 3, 23-42.
- Rua, A. y Nunes, L. (2009). International comovement of stock market returns: A wavelet analysis. *Journal of Empirical Finance*, 16(4), 632-639.
- Serroukh, A., Walden, A. y Percival, D. (2000). Statistical properties and uses of the wavelet variance estimator for the scale analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association*, 49(449), 184-196.
- Valens, C. (2004). *A really friendly guide to wavelets*. Recuperado de <http://pagesperso-orange.fr/polyvalens/clemens/wavelets/wavelets.html>.
- Xiong, X., Zhang, X., Zhang, W. y Li, C. (2005). *Wavelet-based beta estimation of China stock market*. *IEEE Proceedings International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 6, 3501-3505.

## Anexos



**Gráfica 5.** Descomposición por multirresolución de rendimientos del IPC en siete niveles vía TWDMT y función *wavelet* de Daubechies MA (8)

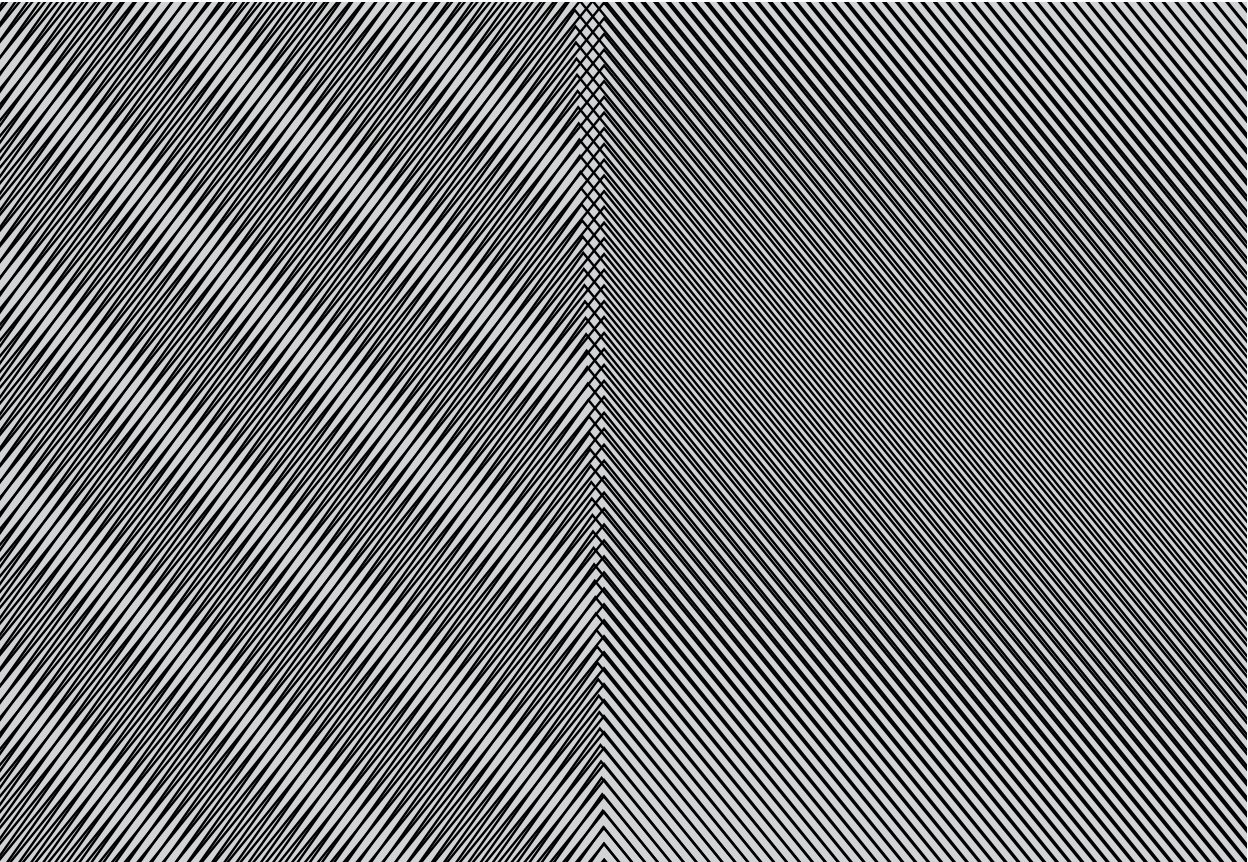


**Gráfica 6.** Cuantil normal y t de Student para los siete niveles de resolución del IPC

Oswaldo Morales Matamoros  
Cinthya Ivonne Mota Hernández

Departamento de Ingeniería de Sistemas de la Escuela Superior de Ingeniería  
Mecánica y Eléctrica (ESIME) Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional

# **Modelación no lineal de series de tiempo financieras**



## Introducción

La economía financiera trata de cómo los grupos de agentes —corporativos, empresas, inversionistas, acreedores y economías— como un todo canalizan e intercambian recursos financieros en el contexto de los mercados. Una gran variedad de problemas y aplicaciones caen dentro de esta amplia área de estudio, incluyendo fijación de precios, optimización de portafolios, eficiencia del mercado, modelación de tasas de interés y de intercambio, presupuesto de capital, pronósticos y negociaciones, microestructura de mercado y comportamiento financiero. La economía financiera es una disciplina altamente empírica y cuantitativa, que tiene sus fundamentos teóricos y herramientas básicamente en la economía, la matemática y la econometría (Poitras, 2000).

Al menos seis de 39 premios Nobel en Economía han sido reconocidos por sus trabajos en áreas relacionadas con la economía financiera. En la década de los setenta del siglo pasado, Robert C. Merton y Myron S. Scholes, junto con Fischer Black, desarrollaron un marco analítico y una fórmula matemática simple para fijar el precio de los instrumentos derivados, tales como las opciones y los *warrants*, que tienen funciones de pago altamente no lineales. Su trabajo fue el primer paso en el desarrollo de la industria de los derivados y de la cultura global y práctica en las finanzas de la administración de riesgos, por lo que Merton y Myron recibieron en 1993 el Nobel de Economía. La relación cercana entre las finanzas y el análisis no lineal de las series de tiempo se extendió ampliamente cuando Robert F. Engle III (premio Nobel de Economía en 2003) desarrolló el modelo no lineal ARCH (Engle, 1982) para modelar la variabilidad de la inflación.

El enlace cercano entre las finanzas y el análisis no lineal de series de tiempo es consecuencia de cuatro factores principales. Primero, las series de tiempo financieras han sido consideradas siempre candidatos ideales a alimentar con sus datos los modelos no lineales, ya que los mercados finan-

cieros organizados han generado enormes bases de datos por muchos años, lo que se refleja en la abundancia de una alta calidad de datos disponibles. La mayoría de estos datos se encuentran en forma de series de tiempo y abarcan, por lo general, varias décadas; algunas veces llegan a exceder un siglo. Además, los precios de los activos pueden ser ahora recopilados con una frecuencia de menos de un minuto, por lo que el tamaño de las muestras puede alcanzar millones de observaciones. Segundo, el desempeño en la predicción de los modelos lineales ha sido muy pobre; prueba de ello son las crisis financieras a nivel global, con un impacto muy negativo en la economía real. Tercero, los desarrollos en las ciencias naturales desde la década de los ochenta, con respecto a la teoría del caos, la dinámica no lineal y la complejidad, ha impulsado un movimiento “no linealista” en las finanzas y ha motivado una nueva agenda de investigación en teorías relevantes, modelos y procedimientos de prueba para las series de tiempo financieras. Cuarto, y más importante, aunque el grueso de la teoría y práctica financiera está construido sobre modelos afines, se han publicado muchos modelos teóricos y evidencias empíricas, lo cual sugiere que la naturaleza de algunos problemas financieros puede ser inherentemente no lineal.

En este capítulo se presenta un ejemplo de cómo, con un enfoque de sistemas complejos, es posible caracterizar y modelar la dinámica no lineal de los mercados financieros aplicando teorías y modelos cuantitativos de la física estadística; a esta corriente, desde la década de los noventa, se le conoce como econofísica.

---

## Modelación no lineal de series de tiempo financieras

La mayor parte de la investigación teórica y empírica en economía financiera ha planteado la hipótesis de que las series de tiempo de los precios de los activos se describen mediante procesos estocásticos con rendimientos impredecibles. Por muchos años se creyó que esta impredecibilidad era necesaria para asegurar que los mercados financieros operaran apropiadamente, de acuerdo con la hipótesis del mercado eficiente (Fama, 1991; Mandelbrot, 1989). Un mercado se considera eficiente si sus precios, de manera correcta e instantánea, reflejan el conjunto de información disponible. Esto a veces se formaliza como la hipótesis de la caminata aleatoria,

la cual establece que los precios siguen una caminata aleatoria con cambios en el precio no pronosticables con base en cambios en los precios pasados. Sin embargo, una serie de estudios muestran que el comportamiento de caminata aleatoria no es condición necesaria ni suficiente para determinar racionalmente los precios de los activos financieros.

Uno de los modelos más sencillos para determinar el precio de un activo financiero que puede ser derivado, con base en la impredecibilidad, es el proceso martingala:

$$p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

donde  $p_t$  es el precio observado de un activo en el tiempo  $t$  y  $\varepsilon_t$  es el incremento o decremento del martingala. En los martingala las diferencias  $\Delta p_t = p_t - p_{t-1} = \varepsilon_t$  son impredecibles sobre la base de diferencias pasadas. Por una sustitución sucesiva de retroceso en (1) se pueden expresar los precios corrientes como la acumulación de todos los errores pasados. En términos financieros, los errores son resultado de información fresca o noticias inesperadas. Al restringir las diferencias  $\varepsilon_t$  para que sean idéntica e independientemente distribuidas (i.i.d.), se obtiene un proceso de caminata aleatoria.

Al representar la caminata aleatoria en tiempo continuo con una tasa de crecimiento  $\mu$ , se obtiene el proceso generalizado de Wiener o movimiento browniano o difusión:

$$dp_t = \mu dt + \sigma dw_t \quad (2)$$

donde  $dw_t$  es una variable aleatoria normal estándar. Los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  en finanzas son la dirección y la volatilidad del proceso, respectivamente. Además, tanto en el tiempo continuo como en el discreto, generalmente el análisis se realiza con los logaritmos de los precios para no obtener precios negativos, mientras se regulariza el comportamiento estadístico de los datos. Si los precios están logarítmicamente distribuidos, los rendimientos logarítmicos están normalmente distribuidos y pueden ser calculados como  $\log p_t - \log p_{t-1}$  o  $\log(p_t/p_{t-1})$ . Esto representa rendimientos compuestos continuamente.

Las caminatas aleatorias, junto con las matemáticas financieras en tiempo continuo, fueron formalmente introducidas en 1900 por Louis Bache-

lier en su defensa doctoral *Théorie de la spéculation*. Bachelier desarrolló un marco de referencia matemático de las caminatas aleatorias en tiempo continuo, a fin de describir la evolución impredecible de los precios de las acciones y construir el primer modelo de fijación del precio de una opción (Mandelbrot, 1989). Estas caminatas aleatorias fueron tratadas posteriormente en forma rigurosa, junto con la modelación no lineal y la pronosticación, por Norbert Wiener. Algunas desviaciones importantes de la caminata aleatoria de Bachelier y del paradigma de la distribución normal fueron desarrolladas por Benoit Mandelbrot —padre de la teoría de fractales— desde la década de los sesenta del siglo pasado (Mandelbrot, 1987). La investigación de Mandelbrot se desarrolla alrededor del teorema del límite central, la familia estable de distribuciones, los procesos dependientes a largo plazo, el escalamiento dinámico y la teoría de fractales.

Gran parte de la motivación que está detrás de la modelación no lineal de las series de tiempo tiene que ver con ciertas características empíricas o hechos estilizados que han sido observados durante muchos años en muchos activos financieros, mercados y periodos de tiempo. Debido a que estas características no fueron siempre consistentes con un proceso generador de datos lineales, los modelos no lineales parecían ser una explicación racional. En particular, comenzando con Mandelbrot y otros investigadores en la década de sesenta, algunos estudios empíricos han reportado que los activos financieros típicamente tienen rendimientos diarios que exhiben: 1) no normalidad: distribuciones incondicionales con sesgo (altos picos) y leptocurtosis (distribuciones de colas pesadas ajustadas con leyes de potencias); 2) comportamiento con saltos: variaciones discontinuas que tienen como resultado observaciones extremas; 3) agrupamiento de la volatilidad: grandes (pequeños) rendimientos en magnitud con tendencia a ser seguidos por grandes (pequeños) rendimientos de ambos signos, y 4) impredecibilidad: cero o débiles autocorrelaciones en los rendimientos.

Con el propósito de saber si estas características se manifiestan en el mercado petrolero, en este capítulo se caracterizó el comportamiento empírico de los precios y de la desviación estándar (fluctuación) de los mismos en cien horizontes de tiempo diferentes, aplicando teorías y modelos cuantitativos desarrollados para estudiar el crecimiento de interfaces rugosas (por tratarse de un sistema complejo, cuyo comportamiento es muy similar al de algunos mercados financieros).

Los sistemas dinámicos complejos exhiben invariancia de escala, es decir, su comportamiento no cambia por un reescalado de las variables (espacio y tiempo) combinadas con un adecuado reescalado de los parámetros observables ( $Z$ ) y los parámetros de control ( $X, t$ ) (Ramasco *et al.*, 2000; Sittler y Hinrichsen, 2002). En este caso, el comportamiento aleatorio de la dinámica espacio-tiempo puede ser caracterizado por las fluctuaciones de los parámetros observables y definido como:

$$\sigma(\Delta, t) = \langle \langle [Z(X, t) - \langle Z((X, t))_{\Delta} \rangle]_{\Delta}^2 \rangle_R \rangle^{1/2} \quad (3)$$

donde  $\langle \dots \rangle_{\Delta}$  denota el promedio del espacio, dentro de una ventana de tamaño  $\Delta$ , y  $\langle \dots \rangle_R$  se refiere al promedio de todas las caracterizaciones realizadas.

Normalmente se espera que la dinámica de escalamiento de invariancia implique que las fluctuaciones  $\sigma(\Delta, t)$  satisfagan la dinámica de escalamiento *ansatz* de Family-Vicsek (Barabasi y Stanley, 1995)

$$\sigma(\Delta, t) \propto t^{\beta} f[\Delta / \xi^z(t)] \quad (4)$$

donde  $\xi(t) \propto t^{1/z}$  es la función de correlación de la escala del “espacio” y la función de escalamiento se comporta como  $f(y) \propto y^H$ , si  $y \ll 1$ , o  $f(y) \approx 1$ , si  $y \gg 1$ ; en este caso  $H$  es el exponente de escalamiento local (o de Hurst) que determina si existe comportamiento aleatorio,  $z$  es el exponente dinámico y  $\beta = H/z$  es el exponente de crecimiento. En ausencia de una escala característica, se espera que las fluctuaciones sean autoafines (o estadísticamente autosimilares). Sin embargo, el escalamiento dinámico se caracteriza por tres o más exponentes de escalamiento; concretamente, de acuerdo con el concepto de escalamiento dinámico general (Barabasi y Stanley, 1995), la dinámica del crecimiento de interfaces rugosas se caracteriza por seis exponentes de escalamiento, cuatro de los cuales pueden ser independientes.

El exponente de Hurst indica si el comportamiento del sistema es aleatorio ( $H = 0.5$ ) o despliega persistencia ( $0.5 < H < 1$ ) o antipersistencia ( $0 < H < 0.5$ ) (Barabasi y Stanley, 1995). Este exponente está relacionado con la dimensión fractal de la gráfica  $Z(X)$  como:

$$D_F = d - H \quad (5)$$

donde  $d$  es la dimensión topológica del espacio (Barabasi y Stanley, 1995).

El escalamiento de (4) es válido para una gran variedad de sistemas en no equilibrio y para fenómenos críticos (Bak, 1996). Específicamente, la dinámica de escalamiento *ansatz* de Family-Vicsek se usa por lo general para describir la cinética del crecimiento de interfaces rugosas (Barabasi y Stanley, 1995). Pero, generalmente, una simple ley de escalamiento (4) no es universal (Ramasco *et al.*, 2000; Sittler y Hinrichsen, 2002); en lugar de esto, hay evidencia de que los logaritmos de los parámetros se pueden utilizar para producir un colapso en los datos (Sittler y Hinrichsen, 2002). De esta forma, Sittler y Hinrichsen (2002) han sugerido la forma de escalamiento dinámico generalizado con exponentes que varían continuamente:

$$\sigma(\Delta, t) \propto \Phi(\Delta^{H(t)}, t^{\beta(\Delta)}) \quad (6)$$

donde  $\Phi$  es la función de escalamiento. Cabe mencionar que por la forma funcional de los exponentes de escalamiento, éstos no pueden ser elegidos libremente; más bien, su dependencia funcional es restringida por un grupo de homomorfismo que liga los conceptos de escalamiento ordinario y escalamiento generalizado (Sittler y Hinrichsen, 2002).

Se analizaron las propiedades estadísticas de los registros diarios de los precios constantes a 1983 del crudo West Texas Intermediate (WTI), los cuales comprendieron 02/01/1986 – 31/12/ 2003 (4,550 datos).

Con el fin de obtener en cien series de tiempo la volatilidad histórica de los precios del crudo WTI,  $V_n(t)$ , para diferentes horizontes de estudio  $n = 2, 3, 4, \dots, 101$ , se utilizó la siguiente ecuación para los últimos 4,096 registros de los precios diarios, o sea, para una longitud  $T = 4,096$  días (gráfica 1):

$$V_n(t) = \sqrt{\langle P^2(t) \rangle_n - \langle P(t) \rangle_n^2} \quad (7)$$

donde  $t$  es el tiempo de negociación (días) y  $\langle \dots \rangle_n$  denota el promedio de una ventana de tamaño  $n$ .

## Análisis estadístico

El análisis estadístico consistió en determinar cuál distribución estadística ajustaba mejor el comportamiento histórico de las cien series de tiempo de:  $p(\tau)$  (gráfica 2a) y de  $V_n(t)$ , a través del *software* @Risk 4.0. Una vez identificadas las distribuciones estadísticas, se procedió a analizar sus parámetros estadísticos. El propósito de este análisis fue hallar distribuciones de colas pesadas (comportamiento ajustado por leyes de potencias). @Risk, desarrollado para analizar situaciones sensibles al riesgo, ordena las distribuciones estadísticas, empezando con las que mejor ajustan los datos, mediante tres criterios estadísticos: de la Chi-cuadrada, de Anderson-Darling y de Kolmogorov-Smirnov.

## Análisis fractal

A fin de detectar y cuantificar el comportamiento de las series de tiempo analizadas, en el marco de la dinámica del crecimiento de interfaces rugosas, se consideró al horizonte de la volatilidad  $n$ ,  $V_n(t)$  como la variable de tiempo, en tanto que el tiempo de negociación  $t$  (días hábiles) se analizó como la extensión lateral del crecimiento de la interfaz. De acuerdo con esto, las fluctuaciones de la volatilidad de precios estuvieron caracterizadas de manera similar a las fluctuaciones de la altura de una interfaz ((Barabasi y Stanley, 1995)) como:

$$\sigma(n, \tau) = \langle [V_n(t) - \langle V_n(t) \rangle_\tau]^2 \rangle_R^{1/2} \propto \Phi(\tau^{Hn}, n^{\beta(\tau)}) \quad (8)$$

donde  $\langle \dots \rangle_\tau$  es el tiempo promedio del tiempo de negociación (días laborados), dentro de una ventana de tamaño  $\tau$  y  $\langle \dots \rangle_R$  es el promedio de las diferentes caracterizaciones realizadas.

Para caracterizar las propiedades de escalamiento de las series de tiempo, en un marco conceptual del escalamiento dinámico generalizado (6) y (8), el exponente de crecimiento de la volatilidad,  $\beta(\tau)$  puede ser determinado a partir del siguiente comportamiento de escalamiento:

$$\sigma(n, \Delta) \propto n^{\beta(\tau)} \tag{9}$$

para diferentes intervalos de tiempo de negociación,  $\tau$ .

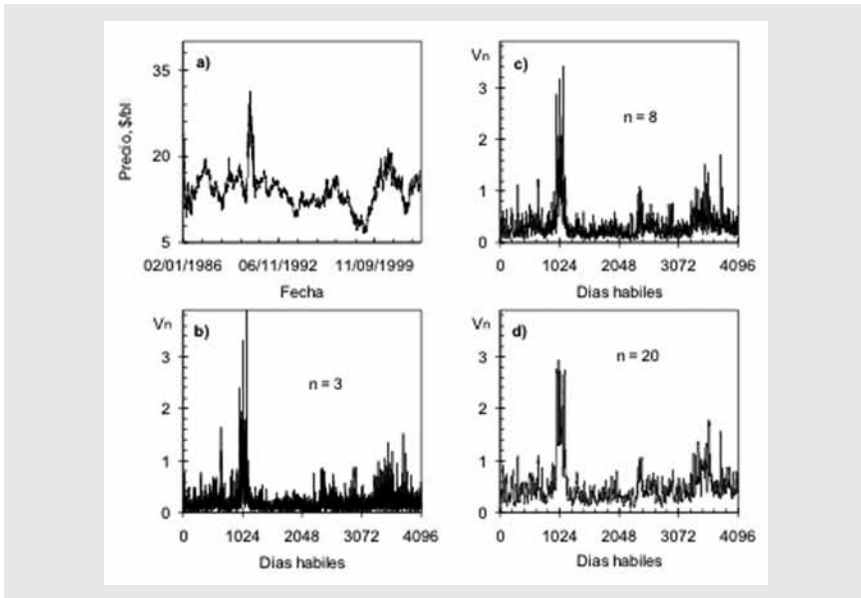
Con el objeto de corroborar la existencia de correlaciones en la escala del tiempo de negociación ( $\tau < T = 4,096$ ), se empleó la función de autocorrelación para  $p(\tau)$  (gráfica 3):

$$C(\tau) = \langle P(t + \tau)P(t) \rangle_T / \langle P^2(t) \rangle_T \tag{10}$$

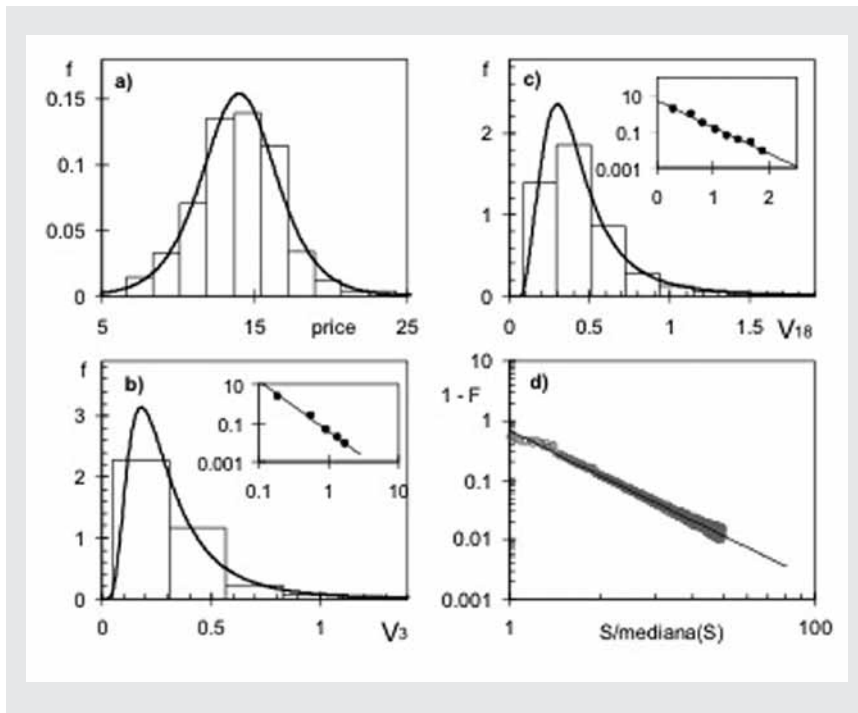
y para la volatilidad histórica de precios,  $V_n(p(t))$ :

$$C_n(\tau) = \langle V_n(t + \tau)V_n(t) \rangle_T / \langle V_n^2(t) \rangle_T \tag{12}$$

donde  $\langle \dots \rangle_T$  denota el tiempo promedio.



**Gráfica 1.** a) Evolución de los registros diarios de precios del crudo WTI (1986-2003) en dólares constantes de 1983; b-d) volatilidades históricas para horizontes de (b)  $n = 3$ , (c)  $n = 8$  y (d)  $n = 20$ .



**Gráfica 2.** Distribuciones de la probabilidad condicional de: a) precios del petróleo, ajustados por la distribución (de colas ligeras) logística; b) volatilidad histórica de precios para el horizonte  $n = 3$ , ajustada por la distribución (de colas ligeras) Pearson; c) volatilidad histórica de los precios para  $n = 18$ , ajustada por la distribución (de colas pesadas) log-logística; d) distribución acumulativa de avalanchas: datos (círculos) ajustados por la ecuación de ley de potencia  $\sigma \propto n^{0.5}$  (línea continua).

Los comportamientos de la función de correlación en  $\tau \rightarrow 0$  y  $\tau \rightarrow T \rightarrow \infty$  caracterizan la “memoria estocástica” de las series de tiempo. Pero se desconoce la forma precisa de la función de autocorrelación. Esto hace imposible usar las ecuaciones (11) y (12) para medir el valor del exponente de Hurst para series de tiempo finitas.

Con el objeto de cuantificar la intensidad de las correlaciones a largo plazo, valor de los exponentes locales de aleatoriedad de Hurst para  $P(\tau)$  y  $V_n(t)$  en cada horizonte de tiempo  $n$ , se emplearon cinco métodos de trazado autoafín con la ayuda del *software* Benoit 1.2. Estos cinco métodos son los siguientes: 1) rango reescalado ( $R/\sigma \propto \tau^H$ ); 2) espectro de potencia

( $P \propto \tau^{-2H-1}$ ); 3) rugosidad-longitud ( $SD \propto \tau^H$ ); 4) variograma ( $V \propto \tau^{2H}$ ), y 4) ondoletas ( $W[X](a) = \langle |W(a,b)| \rangle_b \propto a^{H+1/2}$ ).

La caracterización que arrojaron las volatilidades históricas para  $n \geq 8$  se ajustan a una distribución de colas pesadas (distribución log-logística), en tanto que para  $n < 8$  se ajustan a distribuciones de colas ligeras (distribuciones Pearson y logística) (véase gráfica 2a-c). Por otra parte, la función de autocorrelación de los precios del petróleo (gráfica 3a) decrece exponencialmente (gráfica insertada en 3a) como:

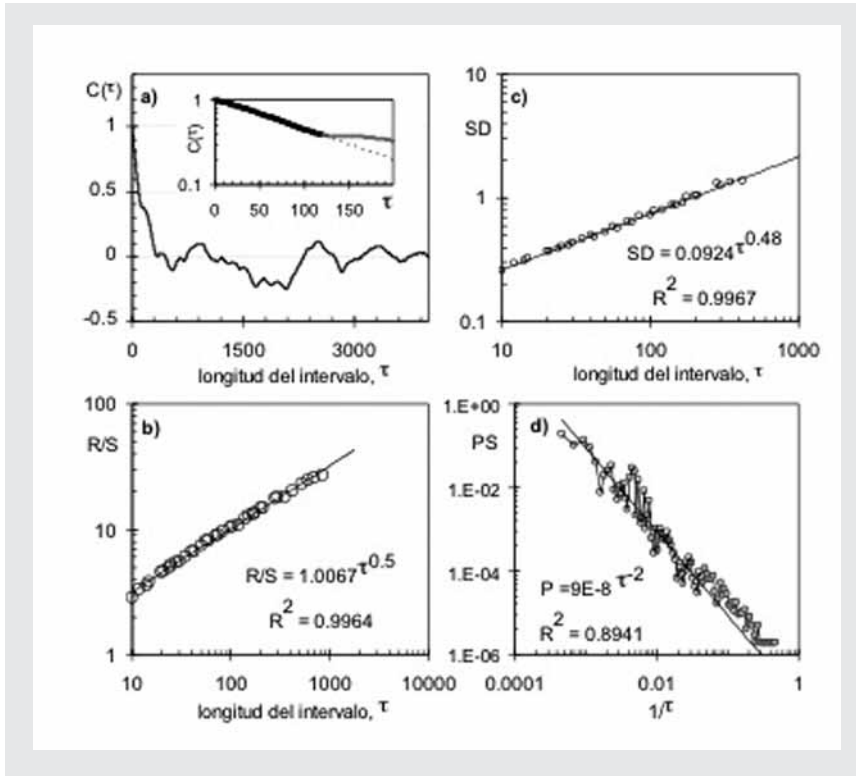
$$C \propto \exp(-\Delta\tau/\tau_0) \quad (13)$$

con un tiempo característico  $\tau_0 = 120$  días hábiles (casi la mitad de un año laborable).

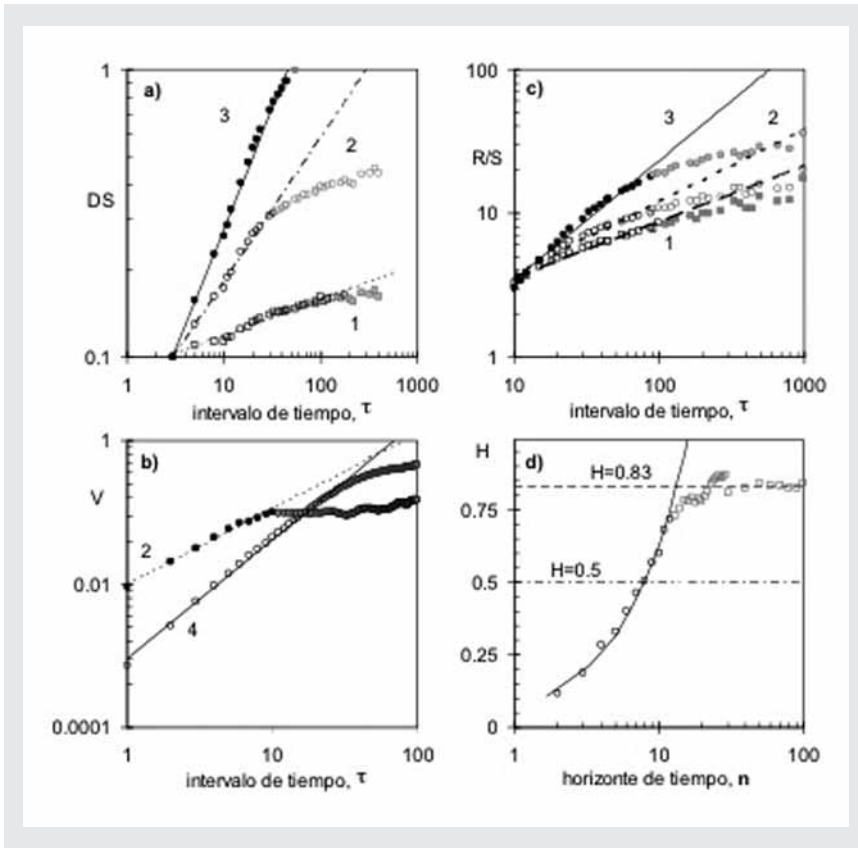
Asimismo, el exponente de Hurst para los precios fue de  $H = 0.50 \pm 0.02$  (gráfica 3b-d). El valor de  $H$  fue determinado por los cinco métodos de trazado autoafín antes señalados, destacando que este valor no es sensible al periodo de tiempo analizado. Además, se calculó el exponente global de escalamiento  $a$  (Ramasco *et al.*, 2000) con la ecuación que describe el comportamiento de escalamiento del rango:

$$R = \langle \max_{t \in T} P(t) - \min_{t \in T} P(t) \rangle_R \propto T^\alpha \quad (14)$$

encontrándose que  $\alpha = H = 0.50 \pm 0.03$ . Esto significa que no existen correlaciones a largo plazo en los precios del petróleo. Esto es coherente con el hecho de que la distribución que mejor ajusta el comportamiento de los precios del petróleo es la distribución —simétrica y de colas ligeras— logística (gráfica 2a).



**Gráfica 3.** a) función de autocorrelación de los precios del petróleo (la figura insertada muestra a  $C(\tau)$  en coordenadas semilogarítmicas); b)-d) gráficas fractales de precios del petróleo, obtenidas por los métodos de: b) rango reescalado, c) rugosidad-longitud y d) espectro de potencia.



**Gráfica 4.** a)-c) gráficas fractales de las volatilidades históricas de los precios del petróleo, obtenidas por los métodos de: a) rugosidad-longitud, b) variograma y c) rango reescalado; los números corresponden a los diferentes horizontes de tiempo: 1.  $n = 3$ , 2.  $n = 8$ , 3.  $n = 20$  y 4.  $n = 60$  días hábiles; d) dependencia del exponente de Hurst con respecto al horizonte (los valores de  $H_n$  fueron promediados a través de los cinco métodos de trazado autoafín), en coordenadas semilogarítmicas (los círculos y cuadrados son los datos experimentales, mientras que la línea continua representa el ajuste de los datos por medio de una ley de potencia).

En lo concerniente al comportamiento de las volatilidades históricas de los precios del petróleo,  $V_n(t)$  (gráficas 1b-d), a diferentes horizontes de tiempo,  $n = 2, 3, 4, \dots$ , éstas poseen una invariancia estadística autoafín dentro un amplio rango de la escala del tiempo de negociación ( $3 < \tau < \tau_c(n)$ ). Esta invariancia estadística autoafín está caracterizada por un exponente de

Hurst bien definido ( $H_n$ ) para cada horizonte  $n$  (gráficas 4a-d):

$$Hn = 0.0621n \quad \text{cuando } n \leq 12 \quad (15)$$

$$Hn = 0.83 \pm 0.04 \quad \text{cuando } n \geq 18 \quad (16)$$

Lo anterior demuestra que las volatilidades históricas para horizontes  $n > 8$  son persistentes: los incrementos en la volatilidad histórica están positivamente correlacionados en el tiempo de negociación, en tanto que las volatilidades históricas a corto plazo ( $n < 8$ ) son antipersistentes:  $V_{n < 8}(t)$  despliega correlaciones negativas en el tiempo de negociación.

También se halló la transición de la volatilidad histórica de los precios del petróleo de un comportamiento antipersistente a otro persistente en  $n = 8$ , el cual es acompañado por un cambio abrupto en el comportamiento de la función de la volatilidad histórica mínima  $\min_n \{V_n(T = 4096)\}$  frente a  $n$  (gráfica 2a); sin embargo, el tiempo promedio y las desviaciones estándar de  $V_n(\tau)$  no tienen comportamiento anómalo en  $n = 8$  (gráfica 5b).

Concretamente, la media de la volatilidad histórica se comporta como:

$$\langle V_n(\tau) \rangle_{\tau=4096} \propto n^{0.50} \quad (17)$$

hasta  $n = 101$ , mientras que la desviación estándar de la volatilidad histórica se comporta como:

$$\sigma(\tau = T = 4096) \propto n^{0.25} \quad (18)$$

hasta  $n = 18$ , pero ésta escala como:

$$\sigma \propto n^{0.50} \quad (19)$$

cuando la volatilidad histórica está caracterizada por el exponente de Hurst de  $H = 0.83 \pm 0.04$  (constante).

Además, el exponente de crecimiento se comporta como (gráfica 5b-c):

$$\beta = 0.25\tau_c/\tau \text{ si } \tau < \tau_c(n) \text{ y } \beta = 0.25 \text{ si } \tau > \tau_c(n) \quad (20)$$

cuando  $n < 18$  mientras  $\beta = 0.5$  para cualquier  $\tau$ , cuando  $n > 18$ . (21)

De igual manera, se halló que el intervalo de correlaciones,  $\tau_c$ , en la escala del tiempo de negociación se incrementa con el horizonte de la volatilidad histórica como:

$$\tau_c \propto n^{z(n,\tau)} \quad (22)$$

donde el exponente dinámico es una función de  $n$  y  $\tau$ , si  $n < 18$ ; mientras que

$$z = H/\beta = 1.66 \quad (23)$$

para grandes horizontes,  $n > 18$  (gráfica 5d).

Con base en lo anterior, se demuestra que la volatilidad histórica de los precios del petróleo a largo plazo ( $n > 18$ ) satisface el escalamiento dinámico *ansatz* de Family-Vicsek (20), en tanto que para horizontes menores a 18 días hábiles la volatilidad histórica cumple con la ley generalizada de escalamiento dinámico (Sittler y Hinrichsen, 2002):

$$\sigma(n, \tau) \propto F \cdot [(\tau)^{H(n)}, n^{\beta(\tau)}] \quad (24)$$

con exponentes de escalamiento (15) y (20) que continuamente están variando, los cuales son funciones cuasi homogéneas que satisfacen la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial \ln(Hn)}{\partial \ln(n)} = \frac{\partial \ln(\beta)}{\partial \ln(\tau)} = 1 \quad (25)$$

Esto implica que la función de escalamiento  $F$  posee una invariancia local de escalamiento (Sittler y Hinrichsen, 2002):

$$F[(\lambda\tau)^{H(n)}, (\lambda n)^{\beta(\tau)}] = \lambda F \cdot [(\tau)^{H(n)}, n^{\beta(\tau)}] \quad (26)$$

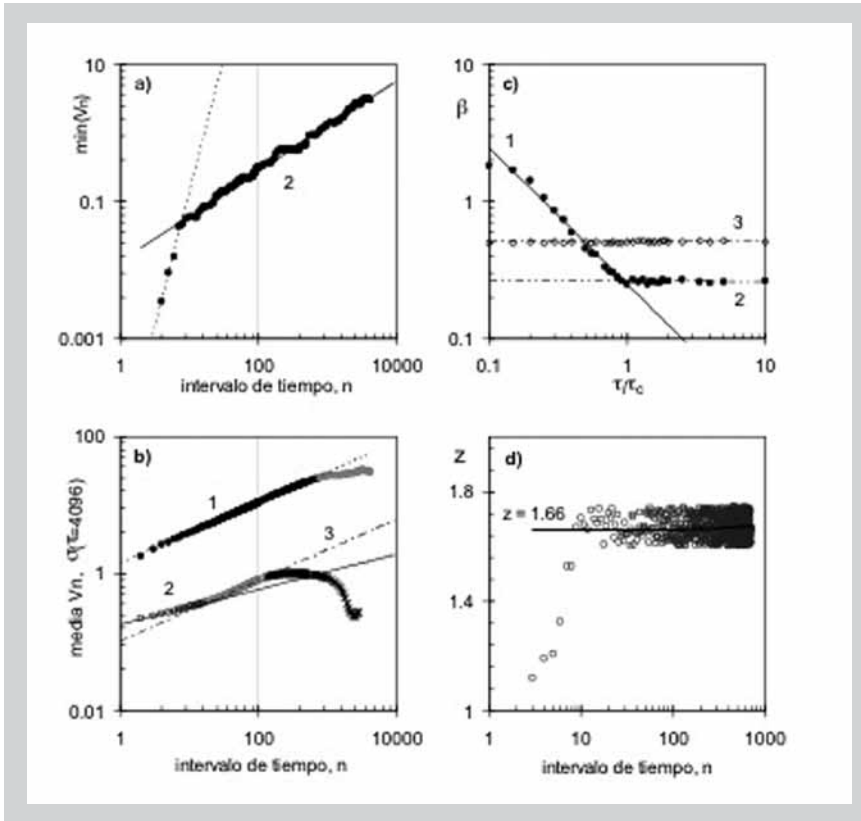
donde  $\lambda$  es el parámetro de dilatación y  $n < 18$ ,  $\tau < \tau_c$ . La dependencia funcional de estos exponentes de escalamiento es restringida por un grupo de homomorfismo que liga los conceptos de escalamiento ordinario y de escalamiento generalizado (Sittler y Hinrichsen, 2002).

La transición de un estado antipersistente a otro persistente indica la existencia de una escala intrínseca en el horizonte de la volatilidad histórica de los precios del petróleo (Wen-Tau y Lin, 1998),  $n_c \approx 8$ . Para tener una visión más profunda de la dinámica de la volatilidad histórica de los precios del petróleo, también se realizó el análisis estadístico de las volatilidades,  $V_n(\tau)$  y de las avalanchas definidas como:

$$S(n, \tau) = V_{n+1}(\tau) - V_n(\tau) \quad (27)$$

Con este análisis se determinó que para horizontes a corto plazo,  $n < 8$  la probabilidad condicional de la volatilidad histórica de precios es mejor ajustada por la distribución (simétrica y de colas ligeras) Pearson con  $p = 0.41$  (gráfica 2b).

$$f(V_n) = \frac{(V_n - \theta)^{-(\gamma+1)}}{p^{-\gamma} \Gamma(\gamma)} \exp\left(-\frac{V_n - \theta}{p}\right) \quad (28)$$



**Gráfica 5.** Resultados del análisis de escalamiento de la volatilidad histórica de precios del petróleo (los puntos representan datos experimentales y las líneas muestran ajustes de los datos mediante leyes de potencia): a) función de volatilidad histórica mínima versus horizontes de tiempo: 1)  $\min(V_n) = 10^{-5}n^{3.95}$ ,  $R^2 = 0.97$  y 2)  $\min(V_n) = 0.014n^{0.66}$ ,  $R^2 = 0.993$ ; b) media: 1) desviación estándar (2,3) de la volatilidad histórica ( $\tau = 4,096$ ) versus intervalo de tiempo,  $n$ : 1)  $\langle V_n(\tau = 4096) \rangle_n = 1.5n^{0.50}$ ,  $R^2 = 0.999$  2)  $\sigma\{V_n(\tau = 4096)\} = 0.18n^{0.26}$ ,  $R^2 = 0.995$  y 3)  $\sigma\{V_n(\tau = 4096)\} = 0.10n^{0.45}$ ,  $R^2 = 0.998$  (el título del eje de las  $x$  indica la cantidad); c) exponente de crecimiento  $\beta$  versus intervalo de tiempo normalizado para los horizontes de la volatilidad:  $n = 3$  (1,2) y  $n = 60$  (3); se ajustaron los datos con las ecuaciones (20) y (21); d) dependencia del exponente dinámico respecto al horizonte de la volatilidad histórica de los precios del petróleo.

Y con el horizonte dependiendo de los parámetros:

$$\gamma = 3.6 \pm 0.1, p = 0.48n^{0.34} (R^2 = 0.95), y$$

$$\emptyset = 0.13n^{-0.69} (R^2 = 0.97) \quad (29)$$

donde  $\Gamma(\gamma)$  es la función gama.

Mientras que para horizontes a largo plazo,  $n > 8$ , la probabilidad condicional de la volatilidad histórica de los precios del petróleo es la distribución log-logística con  $p = 0.38$  (gráfica 2c):

$$f(V_n) = \frac{\gamma[(V_n - \emptyset)/p]^{\gamma-1}}{p\{1 + [(V_n - \emptyset)/p]^\gamma\}^2} \quad (30)$$

$$y \text{ con } \gamma = 2.55 \pm 0.07, p = 0.104n^{0.385} (R^2 = 0.998)$$

$$y \emptyset = 0.0082n^{0.744} (R^2 = 0.996) \quad (31)$$

Es decir, la distribución de la volatilidad histórica a largo plazo es de “colas pesadas”:  $\gamma = 2.55 \pm 0.07$  ( $\gamma$  es independiente del horizonte de la volatilidad para intervalos de tiempo  $n > 8$ ), pero  $\gamma$  está fuera de los límites del rango estable de Lévy ( $0 < \gamma < 2$ ) porque los parámetros de las distribuciones de la volatilidad histórica de los precios (gráfica 2b-d) y los exponentes de escalamiento en las ecuaciones (5) y (28) no son sensibles al periodo (muestra de datos) que se está analizando.

Para finalizar, en lo que se refiere a la distribución estadística de las avalanchas (gráfica 2), ésta es mejor ajustada por la distribución log-logística (de colas pesadas), obedeciendo a una ley de potencia con  $p = 0.48$ :

$$F \propto 1 - \{Q/\text{mediana}[Q(\tau)]\}^{-1.46} \quad (32)$$

y con

$$\emptyset = 0, p = 0.75n^{-0.68}, y \gamma = 1.46 \pm 0.02, \quad (33)$$

por lo que el exponente de escalamiento  $\gamma$  se encuentra en el rango estable de Lévy ( $\gamma$  es independiente del horizonte de la volatilidad histórica para intervalos de tiempo  $n > 8$ ).

Esto indica que el comportamiento observado en la volatilidad histórica de los precios del petróleo puede ser interpretado en términos de avalanchas a cualquier escala, las cuales definen un horizonte con escala intrínseca y construyen correlaciones a largo plazo en la volatilidad histórica de los precios del petróleo. Tal comportamiento puede ser modelado con el uso de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (Buceta *et al.*, 1998) con ruido blanco o correlacionado. Lo anterior permite generar un modelo no lineal para predecir, desde el punto de vista estadístico, el comportamiento de los precios del petróleo.

## Conclusiones

En este capítulo se discute el hecho de que la importancia de la economía financiera se refleja en que al menos seis de 39 premios Nobel de Economía han sido reconocidos por sus trabajos en las áreas de econometría financiera. La econometría financiera es una disciplina altamente empírica y cuantitativa que tiene sus fundamentos teóricos y herramientas básicamente en la economía, la matemática y la econometría, a fin de caracterizar y modelar (de manera no lineal) las series de tiempo financieras que reflejan la dinámica de diversos mercados financieros.

En este capítulo se presentó un enfoque alternativo a los de las hipótesis de la eficiencia del mercado y de caminata aleatoria para caracterizar y modelar las series de tiempo de la dinámica de las series de tiempo financieras. Específicamente, se caracterizó la dinámica no lineal del mercado petrolero con un enfoque de sistemas complejos, en concreto dentro del marco conceptual de la teoría de fractales y del crecimiento de interfaces rugosas. Dicha caracterización se realizó a partir del análisis de las series de tiempo de los precios del petróleo crudo WTI y de las series de tiempo de las fluctuaciones (volatilidad o desviación estándar) de los precios del petróleo crudo WTI, con el propósito de hallar evidencias empíricas y cuantitativas que permitan aplicar o desarrollar modelos cuantitativos para predecir los precios del petróleo en diferentes horizontes de tiempo. Las evidencias empíricas y cuantitativas halladas fueron las siguientes.

En primer lugar, los precios constantes diarios del crudo WTI tienen comportamiento aleatorio: distribución (simétrica y de colas ligeras) lo-

gística, y exponente de Hurst  $H = 0.5$ , válido para todos los horizontes de tiempo analizados. Además, la función de autocorrelación de precios decrece exponencialmente como  $C \propto \exp(-\Delta\tau/\tau_0)$ , con un tiempo característico  $\tau_0 = 120$  días hábiles (casi la mitad de un año laborable).

En segundo lugar, al analizar el comportamiento de la volatilidad histórica de los precios del petróleo en el marco de la teoría de fractales y de la cinética del crecimiento de interfaces rugosas se concluye lo siguiente:

1. La volatilidad a corto plazo,  $V_n(\tau), n < 8$  es antipersistente: distribución (de colas ligeras) Pearson, autocorrelaciones negativas y  $H < 0.5$ ; mientras que a largo plazo  $V_n(\tau), n > 8$  es persistente: distribución (de colas pesadas) log-logística, los incrementos en la volatilidad están positivamente correlacionados con el número de días hábiles y  $H = 0.83 \pm 0.04$ .
2. Existe la transición de un comportamiento antipersistente a otro persistente, el cual va acompañado de un cambio abrupto en el tipo de distribución estadística que ajusta el comportamiento de la volatilidad histórica.
3. La volatilidad a largo plazo satisface la dinámica de escalamiento de Family-Vicsek *ansatz* (ecuación (4)), mientras que a corto plazo satisface la ley generalizada de escalamiento con exponentes que varían continuamente (ecuación (24)), es decir, posee invariancia local de escalamiento.
4. El intervalo de correlaciones en la escala del tiempo de negociación se incrementa con el horizonte de la volatilidad como  $\Delta\tau_c \propto n^z$ , cuando  $n > 8$ .

Los hallazgos antes señalados sugieren que la dinámica de la volatilidad histórica de los precios del petróleo está gobernada por un estado crítico autoorganizado (SOC, por sus siglas en inglés) parecido a los que comúnmente ilustran, de manera conceptual, las avalanchas en una pila de arena (Bak, 1996). La característica más esencial del SOC es que el sistema salta de un estado metaestable a otro mediante la dinámica de avalanchas, hasta llegar a un estado crítico sin alguna fuerza externa. De acuerdo con esto, el sistema evoluciona a través de estados transitorios en horizontes de tiempo  $n < 18$ , los cuales no son críticos, hacia un atractor dinámico en equilibrio (dentro del estado crítico) para horizontes a largo plazo. En el largo plazo, cuando

la volatilidad histórica de precios obedece a la dinámica de escalamiento de *ansatz* Family-Vicsek (4) donde podría ser predecible su comportamiento (en sentido estadístico) (Frette *et al.*, 1996; Pecuski *et al.*, 1996).

Se espera que la transición de un estado antipersistente a otro persistente se pueda observar en una amplia gama de sistemas que desplieguen una dinámica de escalamiento generalizado con exponentes que estén variando continuamente. Ejemplos de tales sistemas incluyen los modelos SOC de pilas de arenas (Tebaldi, 1999), dinámica de rugosidad de frentes húmedos (Balankin y Morales, 2001), algunos experimentos en la turbulencia (Wu *et al.*, 1999) y muchos otros sistemas gobernados por la dinámica de avalanchas. Asimismo, la transición de la antipersistencia a la persistencia se observó en la rugosidad generada por el movimiento de un frente húmedo, al realizar experimentos con papel húmedo (Balankin *et al.*, 2003).

La existencia de un mecanismo “universal”, que emerja durante la transición de un comportamiento antipersistente a otro persistente, en sistemas de diferente naturaleza podría proporcionar una nueva perspectiva sobre la dinámica de los sistemas complejos —concretamente los sistemas económicos y los sistemas financieros—, gobernados por la dinámica de avalanchas, lo cual conduce a una dinámica de escalamiento generalizado con exponentes que estén variando continuamente. Esto permitiría la combinación de modelos probados en la física estadística con los modelos econométricos aplicados.

## Bibliografía

- Bak, P. (1996). *How nature works: The science of self-organized criticality*. New York: Copernicus.
- Balankin, A. y Morales, D. (2001). *Emergent nature*. London: M. M. Novak.
- Balankin A, Morales, D., Susarrey, O., Márquez, J. y García, R. (2003). Development of interface roughness in spontaneous imbibition experiments. *Physics Letters A*.
- Barabási, A. y Stanley, H. (1995). *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge: Cambridge University Press,
- Buceta, J., Pastor, J., Rubio, M. y De la Rubia, F. (1998). *Physica D*, 113, 166-177.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1008.

- Fama, E. (1991). Efficient capital markets. *The Journal of Finance*, 45(5), 1575-1617.
- Frette, V., Christensen, K., Malthé-Sorensen, A., Feder, J., Jossang, T. y Meakin, P. (1996). Avalanche dynamics in a pile of rice. *Letters to Nature*, 379(4), 49-52.
- Mandelbrot, B. (1997). Three fractal models in finance: Discontinuity, concentration, risk. *Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA*, 26(2), 171-211.
- Mandelbrot, B. y Bachelier, L. (1989). *The new Palgrave: Finance*. London: Macmillan.
- Peczuski, M., Maslov, S. y Bak, P. (1996). Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models. *Physical Review E*, 53, 414-443.
- Poitras, G. (2000). *The early history of financial economics*. Cheltenham: Edward Elgar.
- Ramasco, J., López, J. y Rodríguez, M. (2000). Generic dynamic scaling in kinetic roughening. *Physical Review Letters*, 84, 2199-2202.
- Sittler, L. y Hinrichsen, H. (2002). On generalized scaling laws with continuously varying exponents. *Journal of Physics*, 35(4), 10531-10538.
- Tebaldi, C., De Menech, M. y Stella, A. (1999). Multifractal scaling in the bak-tang-wiesenfeld sandpile and edge events. *Physical Review Letters*, 83, 3952-3955.
- Wen-Tau, J. y Lin I. (1998). Anomalous diffusion in strongly coupled quasi-2D dusty plasma. *Physical Review Letters*, 80, 3073-3076.
- Wu, X., Kadanoff, L., Libchaber, A. y Sano, M. (1999). Frequency power spectrum of temperature fluctuations in free convection. *Physical Review Letters*, 64, 2140-2143.

Claudio Andrés Bonilla

Escuela de Economía y Negocios de la Universidad de Chile

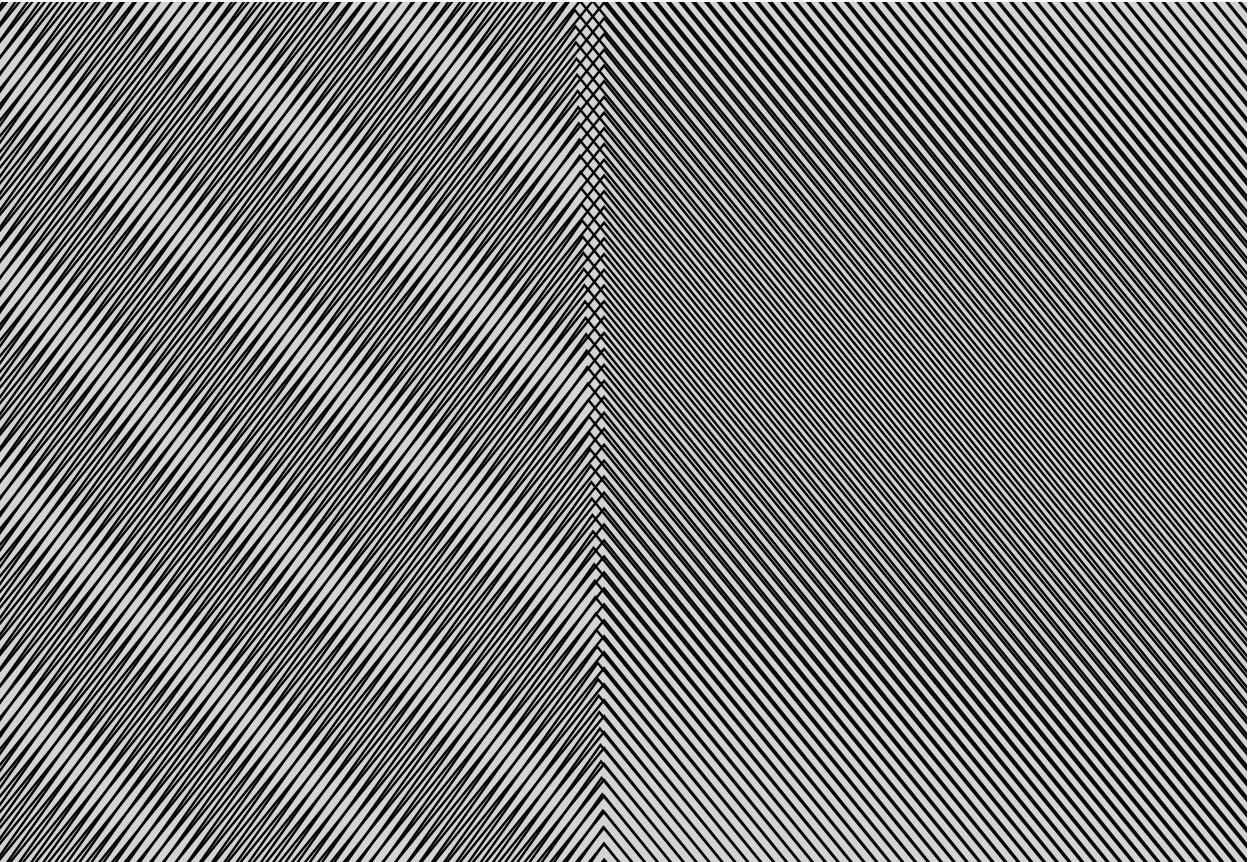
Rafael Romero-Meza

Escuela de Negocios de la Universidad Adolfo Ibáñez

Elizabeth Gutiérrez

Anderson School of Business de la Universidad de California en Los Ángeles

# No linealidad de los retornos accionarios en Chile



## Introducción

En la literatura financiera, el de eficiencia de mercado es un tema que siempre ha despertado enorme interés; desde los trabajos seminales de Samuelson (1965) y Fama (1970), han sido numerosas las investigaciones empíricas que buscan comprobar el cumplimiento de la hipótesis de eficiencia de mercado (EMH) en los mercados financieros. Bajo EMH los precios de mercado de las acciones deben obedecer a un modelo *random walk*; de este modo, los precios son independiente e idénticamente distribuidos (i.i.d.), es decir, no existe un potencial de predictibilidad y, por consiguiente, tampoco existen oportunidades de ganancias anormales para los inversores.

El estudio tradicional de la EMH se ha enfocado en examinar sólo la predictibilidad lineal de las series de tiempo financieras; sin embargo, desde la publicación seminal de Hinich y Patterson (1985), que proyectó evidencia irrefutable de comportamiento no lineal de gran parte de las acciones que se transan en el New York Stock Exchange NYSE, el estudio de este tipo de comportamiento en los mercados accionarios se ha convertido en una especialidad de creciente importancia en la econometría financiera (véanse Tsay, 1986; Brock *et al.*, 1987; White, 1989 y 1990). Saadi y Gandhi (2006) señalan que en el estudio de la hipótesis de *random walk* hay que ser capaces de detectar dependencias tanto lineales como no lineales, ya que movimientos en los precios accionarios pueden parecer no predecibles cuando se usan modelos lineales, pero son previsibles en modelos no lineales y esto nos llevaría a no rechazar equivocadamente la EMH, es decir, a cometer un error del tipo II.

Aunque existe abundante literatura sobre eficiencia de mercado y comportamiento de los retornos accionarios, ésta se concentra mayormente en mercados de capitales de países desarrollados. Por lo tanto, es trascendental estudiar los mercados emergentes y menos desarrollados, ya que a nivel mundial el número de ellos ha aumentado substancialmente, y también

su importancia en la diversificación en el portafolio internacional. En este sentido, el presente trabajo contribuye a subsanar la falta de estudios acerca de los mercados emergentes. Para ello analizamos el mercado accionario chileno, considerado uno de los más importantes mercados emergentes de América Latina. El mercado bursátil chileno experimentó un gran crecimiento entre los años 1980 y 1995, pero a partir del año 1996 y hasta 2003 sus principales índices presentaron una tendencia a la baja. En 2004 el mercado accionario repuntó y se transformó en la principal fuente de rentabilidad del sistema financiero chileno.

De acuerdo con la teoría de finanzas, dependiendo de los supuestos hechos sobre el *set* de información disponible, se pueden distinguir tres tipos de eficiencias: débil, semifuerte y fuerte. En este estudio estamos interesados en EMH débil, ya que es posible probar dicha hipótesis empíricamente.

Para llevar a cabo este análisis utilizamos la prueba de bicorrelación de Hinich en conjunto con el procedimiento de pruebas por ventanas para detectar comportamiento no lineal en las tasas de retornos de doce importantes empresas chilenas que transan en la Bolsa de Valores de Chile y pertenecen al Índice General de Precios de Acciones (IGPA), el principal de la bolsa chilena. Además, para dar soporte a nuestras conclusiones, también aplicamos las pruebas BDS y Engle LM.

Los resultados sugieren que los retornos no siguen un camino aleatorio ya que los retornos accionarios de cada empresa presentan periodos de no linealidad, lo que nos llevaría a rechazar la EMH. Por otro lado, las dependencias seriales no lineales son episódicas por naturaleza, es decir, las series de retornos están caracterizadas por pocos y breves periodos no lineales estadísticamente significativos, seguidos por largos periodos de tiempo en los cuales los retornos siguen un proceso de ruido blanco. Los resultados de las pruebas alternativas apoyan lo reportado por la prueba de Hinich.

## Revisión de la literatura

Los primeros trabajos académicos que intentaron modelar la dinámica económica no lineal provienen de Kaldor (1940), Hicks (1950) y Goodwin (1951), que estudiaron los ciclos económicos. Varios años después, Takens (1981) y Grassberger y Procaccia (1983) investigaron los procesos caóticos

producto de dependencias no lineales en las series de datos. Pero fue con los trabajos de Hinich y Patterson (1985), Brock (1986) y Hsieh (1989) cuando vimos el desarrollo de las técnicas estadísticas que permiten identificar la presencia del fenómeno de no linealidad en las series de datos financieros (Brooks, 1996).

Desde entonces, la evidencia de que los mercados de activos financieros presentan algunos episodios de comportamiento no lineal ha ido creciendo. Encontramos estudios que reportan no linealidad en el mercado estadounidense como los de Hinich y Patterson (1985), Scheinkman y LeBaron (1989), Hsieh (1991), Brock *et al.* (1992), Hsieh (1995), Kohers *et al.* (1997), Patterson y Ashley (2000) y Skaradzinski (2003); en los mercados europeos, como Panunzi y Ricci (1993), Abhyankar *et al.* (1995), Brooks (1996), Brooks *et al.* (1998), Afonso y Teixeira (1998), Opong *et al.* (1999), Brooks y Hinich (2001), Kosfeld y Robé (2001), Fernández *et al.* (2002), Panagiotidis (2005); en los mercados asiáticos, como Antoniou *et al.* (1997), Ammermann (1999), Ahmed *et al.* (1999), Ammermann y Patterson (2003), Lim *et al.* (2003) y Lim y Hinich (2005), y en los mercados latinoamericanos, como Bonilla *et al.* (2006) y Romero-Meza *et al.* (2006).

En los artículos mencionados anteriormente podemos encontrar varias aplicaciones que utilizaron la prueba de bicorrelación de Hinich, en conjunto con el procedimiento de pruebas por ventanas (Hinich, 1996), para detectar dependencias no lineales en las series de retornos accionarios. Ejemplos de ello son Brooks y Hinich (1998), Ammermann (1999), Ammermann y Patterson (2003), Skaradzinski (2003), Lim *et al.* (2003), Lim y Hinich (2005) y Bonilla *et al.* (2006).

Brooks y Hinich (1998) prueban la validez de especificar una estructura de error GARCH para los datos de series de tiempos financieras de un conjunto de diez monedas para el tipo de cambio de la libra esterlina. Los resultados demuestran que hay una estructura estadísticamente presente en los datos que no puede ser capturada por un modelo GARCH o cualquiera de sus variantes. Ammermann (1999) estudia la Bolsa de Taiwán e índices de acciones para otras bolsas como las de Nueva York, Londres, Tokio, Hong Kong y Singapur. Sus resultados apoyan la idea del comportamiento no lineal en las series de datos. Ammermann y Patterson (2003) analizan varios índices financieros internacionales para determinar el grado de dispersión que presenta el fenómeno de no linealidad, y luego analizan el mercado

accionario de Taiwán para detectar si la no linealidad es una característica propia de las series de tiempo financieras. Sus resultados indican que la no linealidad es un fenómeno universal de las series financieras que existe en todos los mercados estudiados y en la gran mayoría de las acciones estudiadas que cotizan en el mercado accionario taiwanés. Skaradzinski (2003) analiza 60 acciones del NYSE de empresas de distinta capitalización, para los años impares entre 1993 y 2001. Los resultados arrojan una diferencia estadísticamente significativa en el nivel y la incidencia de comportamiento no lineal para las carteras de diferente clasificación. Las acciones de gran capitalización exponen el nivel más alto y la mayor incidencia de comportamiento no lineal, seguido por acciones de capitalización media, y luego acciones de capitalización pequeña. Estas diferencias son más pronunciadas al comienzo de la década y son significativas a lo largo de todo el periodo de estudio. Para todas las carteras la correlación no lineal aumenta a lo largo de la década, mientras disminuye la de correlación lineal. Además hay casos de correlaciones esporádicas entre las distintas carteras, lo cual indica que esta relación es más dinámica de lo que se creía.

Por su parte, Lim *et al.* (2003) verifican la adecuación del modelo GARCH en términos de capacidad para describir el proceso generador que está detrás del mercado accionario de Malasia. Los resultados de la bicorrelación demuestran que el modelo no es capaz de entregar una adecuada caracterización del proceso generador en este mercado. Lim y Hinich (2005) analizan la existencia de no linealidad en los mercados financieros asiáticos; para ello, consideran 14 índices accionarios. Ellos encuentran que la dependencia no lineal parece ser no persistente en el tiempo, pero sí lo suficientemente significativa como para compensar los largos periodos de tranquilidad, y así rechazar la hipótesis de ruido blanco en las series. Por su parte, importantes excepciones a la carencia de estudios para mercados latinoamericanos son los trabajos de Bonilla *et al.* (2006) y Romero Meza *et al.* (2006). El primero verifica que los periodos de no linealidad para los retornos accionarios de los principales índices latinoamericanos son de naturaleza episódica. El segundo detecta los eventos políticos y económicos que deben explicar los episodios de no linealidad encontrados en las series de retornos del índice del mercado accionario chileno.

## Datos

En este trabajo analizamos las series de retornos diarios de doce empresas que pertenecen al principal índice accionario de la Bolsa de Valores de Chile, el IGPA. Las empresas fueron seleccionadas según su peso relativo en el índice bursátil. Nuestra fuente de datos fue Económica.

Los retornos accionarios son obtenidos de los precios de cierre a través de la siguiente expresión:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right),$$

donde  $r_t$  es el retorno de la acción en el periodo  $t$ ,  $p_t$  es el precio de cierre en el periodo  $t$ , y  $p_{t-1}$  es el precio de cierre en el periodo  $t-1$ .

La tabla 1 presenta el periodo de estudio y el total de datos para cada una de las empresas analizadas.

Tabla 1. Periodo de estudio y número de datos por empresa				
	Fecha de inicio	Fecha de término	Número de datos	Peso relativo
IGPA	05-01-1998	15-12-2006	2,256	-
Antarchile	08-01-1998	18-12-2006	1,942	4.13
BCI	07-01-1998	18-12-2006	1,976	1.85
Banco Santander	05-01-1998	15-12-2006	2,216	5.96
Chile	07-01-1998	15-12-2006	2,114	3.49
Chilectra	05-01-1998	07-07-2006	1,784	1.82
CMPC	05-01-1998	15-12-2006	2,222	3.84
Copec	05-01-1998	15-12-2006	2,234	8.71
Endesa	05-01-1998	15-12-2006	2,231	6.59
Enersis	05-01-1998	15-12-2006	2,229	5.71
Entel	05-01-1998	15-12-2006	2,229	1.76
Falabella	05-01-1998	15-12-2006	2,215	4.93
LAN	06-01-1998	15-12-2006	2,114	1.77

La tabla 2 proporciona un resumen de los principales estadísticos descriptivos para las series de retorno.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos

	Antarchile	BCI	Banco Santander		Chile	Chilectra	CMPC
Media	0.0012	0.0010	0.0007	0.0006	0.0004	0.0008	0.0008
Desv. Est.	0.0249	0.0131	0.0167	0.0173	0.0254	0.0159	0.0159
Máximo	0.5130	0.1093	0.2226	0.1446	0.3982	0.2090	0.209
Mínimo	-0.4960	-0.1136	-0.2142	-0.1335	-0.3964	-0.2021	-0.2021
Asimetría	1.4568	-0.0023	0.3357	0.3793	-0.1158	0.2291	0.2291
Curtosis	203.4160	12.3680	32.2199	14.2727	132.7161	29.3352	29.3352
J-B	3,250.834	7,225.476	78,875.79	11,243.82	1,250.757	64,229.96	64,229.96

	Copec	Endesa	Enersis	Entel	Falabella	Lan	IGPA
Media	0.0008	0.0004	-0.0001	0.0006	0.0006	0.0008	0.0004
Desv. Est.	0.0157	0.0362	0.0198	0.0339	0.0186	0.0230	0.0066
Máximo	0.0984	0.5028	0.1788	0.9473	0.1128	0.1775	0.0447
Mínimo	-0.0673	-0.4980	-0.1762	-0.9565	-0.1178	0.1580	-0.0377
Asimetría	0.3145	0.0488	0.3418	-0.3123	0.4730	0.1518	-0.0414
Curtosis	5.7742	137.0208	12.4098	556.7490	7.7190	12.15	7.0324
J-B	753.217	1,669.68	8,266.86	28,479.04	2,041.28	7,381.21	1,529.13

Con excepción de BCI, Chilectra y Entel, las series de retorno poseen un coeficiente de asimetría<sup>1</sup> positivo, lo cual indica distribuciones con la cola derecha más larga. Respecto a la deformación de las colas, el índice y todas las empresas presentan una curtosis<sup>2</sup> mayor de tres, por lo que estamos en presencia de distribuciones leptocúrticas, es decir, distribuciones más apuntadas que la normal. De esta manera, los retornos diarios de cada empresa no están normalmente distribuidos; esta conclusión es confirmada por el

$$^1 S = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{X_t - \bar{X}}{\hat{\sigma}} \right)^3. \text{ En una distribución normal su valor es cero.}$$

$$^2 K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{X_t - \bar{X}}{\hat{\sigma}} \right)^4. \text{ En una distribución normal, el estadístico tiene un valor igual a tres.}$$

Es así como se pueden encontrar distribuciones leptocúrticas ( $K > 3$ ) o distribuciones platicúrticas ( $K < 3$ ).

estadístico Jarque-Bera<sup>3</sup> (J-B), cuyos resultados confirman la idea de que los retornos no son generados por una distribución normal, ya que se rechaza la hipótesis nula para todas las empresas a un nivel de significancia del 99%.

Por otro lado, también nos interesa comprobar la presencia de raíces unitarias en las series de retornos de cada empresa, ya que bajo la hipótesis *random walk*, la distribución de los retornos debería ser estacionaria a través del tiempo. En este sentido, aplicamos la prueba Dickey-Fuller aumentada (ADF). La tabla 3 muestra los resultados estadísticos de la prueba, los cuales nos llevan a rechazar la hipótesis nula de una raíz unitaria (o no estacionariedad) para cada serie de retornos; en consecuencia, las series son estacionarias. Aún más, si bien se cumple una de las condiciones del modelo *random walk*, es necesario comprobar, además, que los residuos se comportan como variables aleatorias i.i.d.

## Metodología

En esta sección describimos brevemente el procedimiento de prueba por ventanas y la prueba de bicorrelación desarrollada por Hinich (1996).<sup>4</sup> Supongamos que la secuencia  $\{x(t)\}$  denota el proceso de los datos de la muestra, donde la unidad de tiempo,  $t$ , es un entero. El procedimiento de prueba emplea ventanas no traslapadas; entonces, si  $n$  es el largo de la ventana, la ventana número  $k^{\text{th}}$  es  $\{x(t_k), x(t_k + 1), \dots, x(t_k + n - 1)\}$ . La siguiente ventana no traslapada,  $k + 1$  es  $\{x(t_{k+1}), x(t_{k+1} + 1), \dots, x(t_{k+1} + n - 1)\}$ , donde  $t_{k+1} = t_k + n$ . La hipótesis nula para cada ventana es que los  $x\{t\}$  son realizaciones de un proceso estacionario de ruido puro, que tiene bicovarianza cero. La hipótesis alternativa es que el proceso es aleatorio con algunas correlaciones distintas de cero  $C_{xxx}(r) = E[x(t)x(t+r)]$  o bicorrelaciones distintas de cero  $C_{xxx}(r,s) = E[x(t)x(t+r)x(t+s)]$  en el set  $0 < r < s < L$ , donde  $L$  es el número de rezagos.

<sup>3</sup>  $JB = \frac{N-K}{6} \left( S^2 + \frac{1}{4} (K-3)^2 \right)$ ;  $H_0 = JB \sim \chi^2_2$ ;  $H_0$  = retornos accionarios ~ normal;

bajo  $H_0 = JB \sim \chi^2_2$ .

<sup>4</sup> Para una derivación matemática, véanse Hinich (1996) y Hinich y Patterson (2005).

Definiendo  $Z(t)$  como las observaciones estandarizadas obtenidas de la siguiente manera:

$$Z(t) = \frac{x(t) - m_x}{S_x}, \quad (1)$$

para cada  $t = 1, 2, \dots, n$ , donde  $m_x$ ,  $s_x$  son la media muestral y la desviación estándar de la ventana.

La correlación de la muestra está dada por la siguiente expresión:

$$C_{xxx}(r) = (n - r)^{-1/2} \sum_{t=1}^{n-r} z(t)z(t+r), \quad (2)$$

La bicornelación  $(r, s)$  de la muestra es:

$$C_{xxx}(r, s) = (n - s)^{-1} \sum_{t=1}^{n-s} z(t)z(t+r)z(t+s), \quad (3)$$

para  $0 \leq r \leq s$ . La prueba estadística  $H$  utilizada para estudiar las dependencias no lineales dentro de una ventana está definida como:

$$H = \sum_{s=2}^L \sum_{r=1}^{s-1} G^2(r, s) \approx \chi^2_{(L-1)(L-2)} \quad (4)$$

donde

$$G(r, s) = (n - s)^{1/2} C_{xxx}(r, s). \quad (5)$$

En la prueba estadística,  $H$ , el número de rezagos  $L$ , es especificado como  $L = n^b$  con  $0 < b < 0.5$  donde  $b$  es un parámetro que escoge el usuario. Con base en los resultados de las simulaciones, Monte Carlo *et al.* (1985) recomendaron el uso de  $b = 0.4$  para aumentar al máximo el poder de la prueba mientras que se aseguraba una aproximación válida a la teoría asintótica.

## Resultados empíricos

Antes de revisar la existencia de episodios de no linealidad, eliminamos las dependencias lineales de los datos aplicando un modelo  $AR(p)$  a las series

originales. Hacemos esto para asegurar que el rechazo de la hipótesis nula de ruido blanco se deba exclusivamente a dependencias de tipo no lineal.

Para aplicar la prueba, la muestra se ha dividido en un *set* de ventanas no traslapadas de 25 observaciones. El tamaño de la ventana debe ser lo suficientemente largo para que la aplicación de la prueba sea válida y, al mismo tiempo, lo suficientemente corto para asegurar que el proceso generador de datos sea el mismo dentro de la ventana.

En la tabla 3 se muestran los resultados de la aplicación de la prueba de bicorrelación a cada una de las series de los retornos del modelo ajustado  $AR(p)$ . Ellos muestran que la mayoría de los estudios de las empresas chilenas presentan evidencia de no linealidad, con excepción de BCI, Endesa y Enersis, lo que demuestra que la rentabilidad en el mercado bursátil chileno no apoya la hipótesis de los mercados eficientes en su forma débil. Sin embargo, las no linealidades no están temporalmente estables y gran parte del tiempo se comportan como un proceso de ruido blanco en que la no linealidad aparece con poca frecuencia y durante breves periodos del tiempo.

Si se observa más detenidamente la tabla 3, se identifican cuatro periodos en los cuales al menos dos empresas muestran la no linealidad en forma simultánea.

**Tabla 3. Prueba de raíces unitarias**

	<b>Antarchile</b>	<b>BCI</b>	<b>Banco Santander</b>	<b>Chile</b>	<b>Chilectra</b>	<b>CMPC</b>
Estadístico ADF	-36.96	-26.92	-46.36	-45.08	-53.98	-45.83
1% valor crítico	-3.96	-3.96	-3.96	-3.96	-3.96	-3.96
5% valor crítico	-3.41	-3.41	-3.41	-3.41	-3.41	-3.41
10% valor crítico	-3.13	-3.13	-3.13	-3.13	-3.13	-3.13

	<b>Coppec</b>	<b>Endesa</b>	<b>Enersis</b>	<b>Entel</b>	<b>Falabella</b>	<b>LAN</b>	<b>IGPA</b>
Estadístico ADF	-41.96	-31.59	-43.60	-42.37	-42.55	-27.30	-16.15
1% valor crítico	-3.96	-3.96	-3.96	-3.96	-3.96	-3.96	-3.96
5% valor crítico	-3.41	-3.41	-3.41	-3.41	-3.41	-3.41	-3.41
10% valor crítico	-3.13	-3.13	-3.13	-3.13	-3.13	-3.13	-3.13

\*Valor crítico de MacKinnon para rechazo de la hipótesis de raíz unitaria.

La tabla 4 presenta los resultados obtenidos al aplicar la prueba de bicorrelación a los residuos del modelo  $AR(p)$  ajustado de cada serie de retornos.

Tabla 4. Resultados del procedimiento de pruebas por ventanas

	IGPA	Antarc Chile	BCI	Banco Santander	Chile	Chilectra	CMPC	Copec	Endesa	Enerjis	Entel	Falabella	Ian
Modelo AR (P)	AR(1)	AR(1)	AR(1)	AR(0)	AR(2)	AR(2)	AR(3)	AR(0)	AR(2)	AR(0)	AR(2)	AR(0)	AR(1)
Núm. de ventanas	90	77	79	88	84	71	88	89	89	89	89	84	84
Ventanas H significativas	0	4	0	4	4	1	3	3	0	0	6	5	1
	0.00%	(5.2%)	0%	(4.5%)	(4.8%)	(1.4%)	(3.4%)	(3.4%)	0%	0%	(6.7%)	(6.0%)	(1.2%)
Fechas	20/08/01	08/01/98		08/06/99	29/06/00	28/11/00	09/02/00	16/03/98			15/01/01	04/05/00	06/01/05
	26/09/01	13/03/98		13/07/99	07/08/00	08/01/01	15/03/00	20/04/98			16/02/01	07/06/00	08/02/05
		26/01/99		09/05/00	31/01/01		29/07/04	24/09/01			02/05/01	29/08/01	
		05/04/99		12/06/00	07/03/01		01/09/04	29/10/01			06/06/01	05/10/01	
		01/10/01		06/10/00	07/01/03		26/07/05	02/05/02			16/07/01	22/05/02	
		06/11/01		13/11/00	10/02/03		30/08/05	07/06/02			20/08/01	26/06/02	
		28/02/02		01/08/01	06/01/05						21/08/01	18/03/03	
		04/04/02		06/09/01	08/02/05						28/09/01	24/04/03	
											17/06/03	28/05/04	
											21/07/03	05/07/04	
											20/01/05		
											22/02/05		

Podemos apreciar que el mercado accionario chileno soporta evidencia de no linealidad. Aunque no todas las empresas presentan algún episodio de no linealidad, tal como las series de retornos de BCI, Endesa y Enersis, los resultados implican que el mercado chileno no satisface la hipótesis de mercado eficiente en su forma débil. Es importante señalar que para las series que sí presentan ventanas de no linealidad, el fenómeno no es estable en el tiempo; es decir, las series se comportan como un proceso ruido blanco gran parte del tiempo, y la no linealidad aparece pocas veces y de manera breve.

Al observar con mayor detalle la tabla anterior es posible identificar cuatro periodos en que más de una empresa presenta el fenómeno de no linealidad simultáneamente. La tabla 5 muestra el detalle de los periodos coincidentes.

<b>Ventanas</b>		<b>Empresas</b>
<b>Desde</b>	<b>Hasta</b>	
04/05/00	12/06/00	Banco Santander
		Falabella
01/08/01	29/10/01	Banco Santander
		Copec
		Entel
		Falabella
02/05/02	26/06/02	Copec
		Falabella
06/01/05	22/02/05	Chile
		Entel
		Falabella

Una interrogante que se plantea a partir de los resultados encontrados es si existe algún factor común que haya provocado este comportamiento. Aunque el objetivo principal de este trabajo no es la detección de eventos que expliquen la aparición de los episodios de no linealidad, llevamos a cabo una revisión general de acontecimientos ocurridos durante el periodo de estudio. Queremos destacar ciertos hechos relevantes en las ventanas de no linealidad. En mayo del año 2000, el Banco Central de Chile anunció la

eliminación de permanencia de capitales extranjeros; esta medida buscaba liberalizar el mercado de capitales chilenos y propiciar una mayor integración financiera con el exterior. Para la ventana de 2001, sin duda el suceso más importante fue el ataque a las Torres Gemelas de Nueva York, además encontramos que el IGPA expone simultáneamente la presencia del fenómeno en este periodo. En el año 2002 comenzaron las reformas al sistema de AFP en Chile con la creación de los multifondos en el primer semestre del año. Para el episodio de no linealidad ocurrido en 2005, encontramos que coincidentemente se reactiva el Proyecto de Mercado de Capitales II en el Congreso Nacional de Chile, el cual aborda, entre otros temas, el capital de riesgo y la flexibilización de los límites de inversión que los fondos de pensiones tienen en instrumentos de renta variable.

Por último, sería útil verificar si el comportamiento no lineal de las series de retornos también es capturado por pruebas alternativas de no linealidad.

## Pruebas alternativas de no linealidad

En esta sección verificamos si los resultados de la prueba de bicorrelación de Hinich son avalados por pruebas de no linealidad alternativas ampliamente usadas en la literatura. Para hacer esto aplicamos las pruebas BDS y Engle LM. La prueba BDS fue desarrollada por Brock *et al.* (1996) y es una prueba *portmanteau* estadística que puede ser usada para probar dependencias no lineales de una serie. La hipótesis nula verifica que los elementos de la serie están independiente e idénticamente distribuidos. En nuestra aplicación de la prueba BDS hemos utilizado un epsilon de 0.7 y una dimensión máxima ( $m$ ) de seis. La prueba Engle LM fue desarrollada por Engle (1982) para detectar perturbaciones ARCH. Debido a que la prueba LM es una prueba multiplicadora de Lagrange, está basada en la  $R^2$  de una regresión auxiliar,

la cual en este caso puede ser definida como  $e^2 = \alpha_0 + \sum_s^p \alpha_s e_{t-s}^2 + v_t$ , bajo

la hipótesis nula de un mecanismo generador lineal para  $e^2$ ;  $NR^2$ ; para esta regresión es asintóticamente  $c^2(p)$ . En la aplicación de la prueba Engle LM hemos utilizado hasta cuatro rezagos para cada variable.

La tabla 6 reporta los resultados de la aplicación de las pruebas de no linealidad a los datos. Los *p-values* son reportados.

Tabla 6. Pruebas para dependencia lineal no serial		
	BDS	Engle LM
IGPA	0.0000	0.0000
Antarchile	0.0000	0.0000
BCI	0.0000	0.0000
Bsantander	0.0000	0.0000
Chile	0.0000	0.0000
Chilectra	0.0000	0.0000
CMPC	0.0000	0.0000
Copec	0.0000	0.0000
Endesa	0.0000	0.0000
Enersis	0.0000	0.0000
Entel	0.9656	0.0000
Falabella	0.0000	0.0000
LAN	0.0000	0.0000
Sólo los <i>p-values</i> son reportados, bajo la hipótesis nula de que la serie de tiempo es un proceso i.i.d.		

Los resultados de la tabla 6 dan amplio sustento a los resultados obtenidos con la prueba de bicorrelación de Hinich. La prueba BDS muestra clara evidencia de comportamiento no lineal en la mayoría de las series, salvo para Entel. Por otro lado, los resultados de la prueba Engle LM nos indican la presencia de perturbaciones ARCH para cada serie. Luego, la prueba de Hinich, junto con el procedimiento por ventanas, resulta más eficiente que las pruebas anteriores ya que proporciona información con más detalle y no falla al capturar la presencia del fenómeno ante una muestra amplia de datos, pues subdivide la muestra en submuestras o ventanas que logran capturar no linealidad episódica que puede verse disipada en muestras externas de series de datos.

## Conclusiones

Este trabajo prueba la hipótesis *random walk* en los retornos diarios de doce empresas que pertenecen al principal índice accionario chileno, IGPA. Para llevar a cabo este análisis utilizamos la prueba de bicorrelación de Hinich, con el propósito de determinar la existencia de dependencias no lineales en las series de retornos. Adicionalmente, aplicamos las pruebas BDS y Engle LM para ratificar la presencia de comportamiento no lineal en las series; sus resultados apoyan los obtenidos a partir de la prueba de Hinich.

Los resultados proporcionan evidencia del rechazo de la hipótesis i.i.d., ya que se confirma la presencia de estructuras no lineales en las series de retornos, pero las dependencias seriales no lineales son episódicas por naturaleza; es decir, la mayoría de las series de retorno se caracterizan por pocos y breves periodos de no linealidad estadísticamente significativa, seguidos por largos periodos de tiempo en los cuales los retornos siguen un proceso ruido blanco.

A pesar del rechazo de la hipótesis de eficiencia de mercado en su forma débil, la presencia de comportamiento no lineal posibilita que un inversionista pueda beneficiarse de la asimetría de información y obtener retornos anormales. La naturaleza episódica de las no linealidades impediría explotar el potencial de predictibilidad presente en los retornos.

Finalmente, sería interesante que futuras investigaciones se centren en la detección de los eventos que hayan afectado en forma común a las empresas y que pudieran explicar la aparición de las ventanas de no linealidad en el mercado accionario chileno.

## Bibliografía

- Abhyankar, A., Copeland, L. S. y Wong, W. (1995). Uncovering nonlinear structure in real-time stock-market indexes the S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100. *Journal of Business and Economic Statistics*, 15, 1-14.
- Afonso, A. y Teixeira, J. (1998). Non-linear tests of weakly efficient markets evidence from Portugal. *Estudios de Economía*, 19, 169-187.
- Ahmed, E., Barkley, J. y Uppal, J. (1999). Evidence of nonlinear speculative bubble in Pacific-Rim stock markets. *Quarterly Review of Economics and Finance*, 39, 21-36.

- Ammermann, P. (1999). Nonlinearity and overseas capital markets: Evidence from the Taiwan stock exchange. Disertación puesta a consideración de Faculty of the Virginia Polytechnic Institute y State University para cumplir parcialmente los requisitos para obtener el grado de doctor en filosofía en finanzas.
- Ammermann, P. y Patterson, D. (2003). The cross-sectional and cross-temporal universality of nonlinear serial dependencies. Evidence from world stock indices and the Taiwan Stock Exchange. *Pacific-Basin Finance Journal*, 11, 175-195.
- Antoniou, A., Ergul, N. y Holmes, P. (1997). Market efficiency, thin trading and non-linear behaviour evidence from an emerging market. *European Financial Management*, 3, 175-190.
- Bonilla, C., Romero-Meza, R. y Hinich, M. J. (2006). Episodic nonlinearity in Latin American stock market indices. *Applied Economics Letters*, 13, 195-199.
- Brock, W. A. (1986a). Distinguishing random and deterministic systems: Abridged version. *Journal of Economic Theory*, 40, 168-195.
- Brock, W. A. (1986b). Theorems on distinguishing deterministic from random systems. Dynamic econometric modelling. En Barnett, W. A., Berndt, E. R. y White, H. (eds.), *Proceedings of the third International Symposium in Economic Theory and Econometrics*, 247-265. New York: Cambridge University Press.
- Brock, W., Dechert, D. y Scheinkman, J. (1987). *A test for independence based on the correlation dimension*. Department of Economics, University of Wisconsin, University of Houston and University of Chicago. Versión revisada en 1991.
- Brock, W., Lakonishok, J. y LeBaron, B. (1992). Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. *Journal of Finance*, 47, 1731-1764.
- Brock, W., Dechert, D. y Scheinkman, J. (1996). A test for independence based on the correlation dimension. *Econometrics Review*, 15, 197-235.
- Brooks, C. (1996). Testing for non-linearity in daily sterling exchange rates. *Applied Financial Economics*, 6, 307-317.
- Brooks, C. y Hinich, M. (1998). Episodic nonstationarity in exchange rates. *Applied Economics Letters*, 5, 719-722.
- Brooks, C., y Hinich, M. J. (2001). Bicorrelations and cross-bicorrelations as non-linearity tests and tools for exchange rate forecasting. *Journal of Forecasting*, 20, 181-196.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.
- Fama, E. (1970). The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, 38, 34-105.

- Fernandez-Serrano, J., y Sosvilla Rivero, S. (2003). Modelling the linkages between US and Latin American stock markets. *Applied Economics*, 35, 1423-1434.
- Goodwin, R. (1951). The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles, *Econometrica*, 19, 1-17.
- Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983b). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica 9D*, 189-208.
- Hicks, J. (1950). *A contribution to the theory of the trade cycle*. Oxford University Press.
- Hinich, M. J. y Patterson, D. (1985). Evidence of nonlinearity in daily stock returns. *Journal of Business and Economic Statistics*, 3, 69-77.
- Hinich, M. J. (1996). Testing for dependence in the input to a linear time series model. *Journal of Nonparametric Statistics*, 6, 205-221.
- Hsieh, D. (1989). Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates. *Journal of Business*, 62, 339-368.
- Hsieh, D. (1991). Chaos and nonlinear dynamics application to financial markets. *Journal of Finance*, 46, 1839-1877.
- Hsieh, D. (1995). *Nonlinear dynamics in financial markets evidence and implications*. Fuqua School of Business Duke University, Recuperado de <http://www.duke.edu/~dah7/faj1995.pdf>.
- Kaldor, N. (1940). A model of the trade cycle. *Economic Journal*, (50), 78-79.
- Kohers, T., Pandey, V. y Kohers, G. (1997). Using nonlinear dynamics to test for market efficiency among the major U.S. stock exchanges. *Quarterly Review of Economics and Finance*, 37, 523-545.
- Kosfeld, R. y Robé, S. (2001). Testing for nonlinearities in German Bank stock returns. *Empirical Economics*, 26, 581-597.
- Lim, K., Hinich, M. J. y Liew, V. (2003). Episodic non-linearity and nonstationarity in ASEAN exchange rates returns series. *Labuan Bulletin of International Business and Finance*, 1, 79-93.
- Lim, K. y Hinich, M.J. (2005). Cross-temporal universality of nonlinear serial dependencies evidence from Asian stock indice. *Economics Bulletin*, 7, 1-6.
- Opong, K., Mulholland, G., Fox, A. y Farahmand, K. (1999). The behavior of some UK equity indices. An application of hurst and BDS tests. *Journal of Empirical Finance*, 6, 267-282.
- Panagiotidis, T. (2005). Market capitalization and efficiency. Does it matter? Evidence from the Athens stock exchange. *Applied Financial Economics*, 15, 707-713.

- Panunzi, F. y Ricci, N. (1993). Testing non linearities in Italian stock exchange. *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali*, 40, 559-574.
- Patterson, D. y Ashley, R. (2000). *A nonlinear time series workshop: A toolkit for detecting and identifying nonlinear time series dependence*. Norwell: Kluwer Academic Publishers.
- Romero Meza, R., Bonilla, C. y Hinich, M. (2007). Nonlinear event detection in the Chilean stock market. *Applied Economics Letter*, 14, 987-991.
- Saadi, S. y Gandhi, D. (2006). Testing for nonlinearity & modeling volatility in emerging capital markets: The case of Tunisia. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 9(7), 1021-1050.
- Samuelson, P. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6, 41-45.
- Scheinkman, J. y LeBaron, B. (1989). Nonlinear dynamics and stock returns. *Journal of Business*, 62, 311-337.
- Skaradzinski, D. (2003). *The nonlinear behavior of stock prices. The impact of firm size, seasonality, and trading frequency*. Disertación presentada en la Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University para optar al grado de doctor de filosofía en finanzas. Recuperado de <http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-11242003-223654/>.
- Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. En Rand, D. A. y Young, L.-S. *Dynamical systems and turbulence. Lecture notes in mathematics*, vol. 898, 366-381. Berlin: Springer-Verlag.
- Tsay, R. S. (1986). Time series model specification in the presence of outliers. *Journal of the American Statistical Association*, 81, 132-141.
- White, H. (1989). Learning in artificial neural networks: A statistical perspective. *Neural Computation*, 1, 425-464.
- White, H. (1990). Connectionist nonparametric regression: Multilayer feedforward networks can learn arbitrary mapping. *Neural Networks*, 3, 535-549.

Semei Coronado Ramirez

Departamento de Métodos Cuantitativos, CUCEA, Universidad de Guadalajara

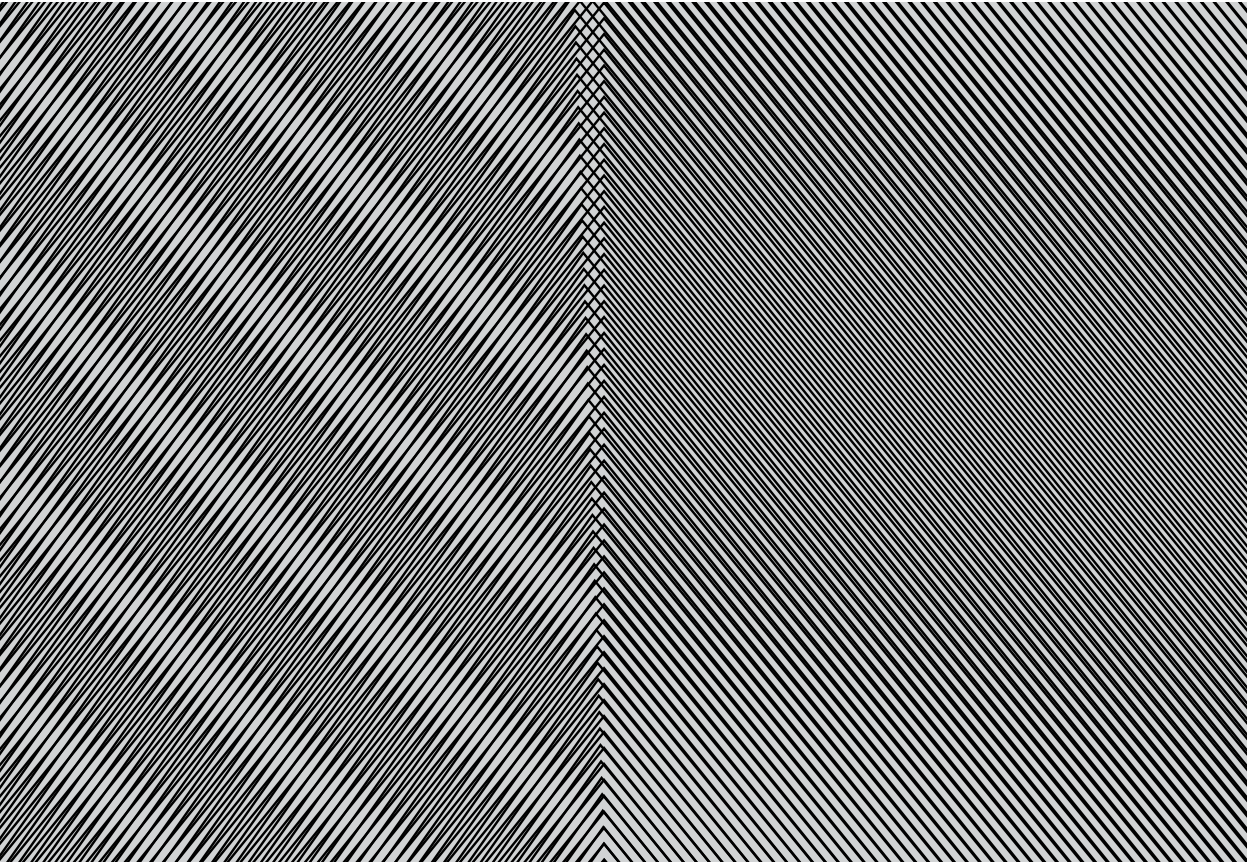
Leonardo Gatica Arreola

Departamento de Economía, CUCEA, Universidad de Guadalajara

Ana Torres Mata

Departamento de Métodos Cuantitativos, CUCEA, Universidad de Guadalajara

# **Un conjunto de pruebas no paramétricas para detectar dependencia no lineal**



## Introducción

Durante los últimos años ha habido un importante avance en el análisis de series de tiempo y el número de trabajos en esta área ha crecido significativamente, en particular en el estudio de procesos que presentan no linealidad. Esta literatura tiene su punto de inicio en un trabajo de Engel (1982) en que desarrolla el modelo autorregresivo con heteroscedasticidad condicional (ARCH) bajo el supuesto de media cero y varianza constante sobre el pasado. El segundo paso de gran importancia en esta literatura fue sin duda la propuesta de modelo más general: el modelo autorregresivo generalizado con heteroscedasticidad condicional (GARCH) de Bollerslev (1986), con el cual se trata de determinar que no haya errores en la varianza. Desde entonces, a partir de estos dos trabajos seminales, la metodología para el estudio de las series de tiempo ha evolucionado por diferentes líneas.

Existe un número considerable de modelos que se desprenden de los ARCH/GARCH. Por ejemplo: los modelos asimétricos GARCH (AGARCH), exponencial GARCH (EGARCH), integrados GARCH (IGARCH), entre otros. Tong (1990) presenta modelos más avanzados; por ejemplo, los basados en el umbral (*threshold models*), los modelos autorregresivos fraccionales (FAR), modelos bilineales (BL), modelos definidos por partes (*TAR piecewise linear models*), modelos polinomiales por partes (*piecewise polynomial models*) y modelos autorregresivos suavizados de umbral (STAR). El último modelo tiene varias generalizaciones y se le conoce como modelo de régimen cambiante (Granger y Teräsvirta 1993).

Sin embargo, existen otras áreas que han estudiado la estructura lineal en las series de tiempo. Una de estas áreas es la física. En varios de los trabajos desarrollados en esta área se han relacionado conceptos formales de física con economía (Tsay, 2005), a lo cual se le ha llamado *econofísica* (Chakraborti *et al.*, 2011: 991). Con los conceptos desarrollados dentro de la física han surgido distintos análisis y aplicaciones a diferentes tipos de

series con el único fin de estudiar la estructura subyacente de la serie. Por ejemplo, el caos en una serie de tiempo se debe a la dependencia no lineal que existe en ella, y varios trabajos se han dedicado a estudiar este tipo de estructuras (Grassberger y Procaccia, 1993; Blank, 1991; Decoster *et al.*, 1992). Otros estudian el comportamiento estadístico no gaussiano o el efecto de colas anchas cuando la serie de datos es leptocúrtica (Bak *et al.*, 1997; Bouchaud y Cont, 1998).

Dado este interés de físicos y economistas por entender comportamientos y estructuras no lineales en las series de tiempo, se ha desarrollado un buen número de métodos utilizados tanto en economía como en física que estudian el supuesto de normalidad, las asimetrías existentes en los procesos, o buscan capturar estructuras no lineales o desviaciones de la aleatoriedad en los datos. Muchas de estas investigaciones utilizan estadísticos comúnmente llamados *portmanteau* (Brooks, 2002: 439).

En este trabajo mostramos la aplicación de algunos modelos de este tipo en series de tiempo económicas. Presentamos cinco modelos no paramétricos para poner a prueba el supuesto de que las innovaciones en una serie de tiempo son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), una vez que sea seleccionado y aplicado a la serie un modelo de la familia ARCH/GARCH.

Nuestro análisis procede de la siguiente manera. Primeramente estudiamos cuál es el mejor modelo, dentro de cuatro modelos de la familia ARCH/GARCH, que se adapta a la serie. Los cuatro modelos que se utilizan son los ARCH, GARCH, TGARCH y EGARCH. Con base en los criterios de Aikake, elegimos el mejor modelo de éstos que se adapta a la serie.

En este caso tomamos la serie del rendimiento diario de los precios del café arábica colombiano. Dado que el objetivo de este trabajo es mostrar la aplicación de pruebas de tipo no lineal y no el estudio del comportamiento de una variable en particular, esta serie se eligió de manera aleatoria entre otras series financieras. El mejor modelo que se adaptó a esta serie resultó ser el EGARCH.

Una vez que seleccionamos el modelo, se aplicó a la serie para aislar las innovaciones y analizar sus propiedades. Para ello utilizamos un conjunto de cinco pruebas no convencionales: la prueba BDS, la McLeod y Li, la Tsay, la bicovarianza de Hinich y el biespectral de Hinich. Nuestro análisis se centró en probar si las innovaciones del modelo al cual se ajusta la serie son i.i.d. e indagar sobre la estructura estadística de esta serie.

En la siguiente sección del trabajo presentamos una descripción muy breve de los modelos que se utilizaron para seleccionar el que mejor se ajustara al comportamiento de la serie. Posteriormente presentamos las pruebas empleadas para analizar las innovaciones de la serie luego de que ésta se ajustó al mejor modelo. Una vez que presentamos las pruebas estadísticas, describimos los datos de la serie y mostramos los resultados obtenidos con las pruebas aplicadas. Finalmente, cerramos este trabajo con la discusión de los resultados y las conclusiones.

## Modelos

### ARCH(p)

El modelo autorregresivo con heteroscedasticidad condicional (ARCH) fue introducido por Engel en 1982. Como es sabido, este es uno de los modelos más populares y más empleados en el estudio de series de tiempo. La generalización de dicho modelo se puede plantear de la siguiente manera. En una serie de tiempo con innovaciones  $\varepsilon_t$  éstas son llamadas ARCH(p) si son independientes e idénticamente distribuidas; es decir, que:

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t^2)$$

$$\Psi_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\} \quad (1)$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$

### GARCH (p,q)

El modelo autorregresivo generalizado con heteroscedasticidad condicional (ARCH), propuesto por Bollerslev en 1986, es también uno de los más empleados en el análisis. Para un modelo general ARCH (p,q),  $\varepsilon_t$  y  $h_t^2$  dependen de sus últimos residuos y de sus propios valores. Esto se puede resumir de la siguiente forma:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j h_{t-j}^2. \quad (2)$$

## TGARCH

El tercer modelo que empleamos en este trabajo, el *threshold* generalizado con heteroscedasticidad condicional (GARCH), fue desarrollado por Zakoian (1994). Este modelo incorpora *shocks* diferenciados en la varianza:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = h_t z_t$$

$$h_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + I_{t-1} \gamma_i) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \quad (3)$$

$$I_{t-i} = \begin{cases} 0 & \varepsilon_{t-i} \geq 0 \\ 1 & \varepsilon_{t-i} < 0 \end{cases}$$

Aunque el proceso  $z_t$  sea gaussiano, esto no implica que los errores sean también un proceso de este tipo. En este caso los valores negativos en las innovaciones se interpretan como una mala noticia al mercado, mientras que los valores positivos se toman como buenas noticias.

## EGARCH

Este modelo, nombrado exponencial GARCH (EGARCH) fue propuesto por Nelson (1991). Garantiza que la varianza sea positiva, no hay restricciones en los parámetros y existen efectos asimétricos y no lineales en las innovaciones sobre la varianza de la serie. En este caso tenemos:

$$\log(h_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \ln(h_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j g(\varepsilon_{t-j}) \quad (4)$$

$$g(\varepsilon_{t-i}) = \left[ \lambda \frac{|\varepsilon_{t-j}^2|}{\sigma_{t-j}} - E\left(\frac{|\varepsilon_{t-j}^2|}{\sigma_{t-j}}\right) \right].$$

## Pruebas aplicadas en la detección de dependencia no lineal

### La prueba BDS

Es una prueba introducida por Brock *et al.* (1996) conocida como BDS. La hipótesis nula es que la serie es i.i.d. Si se rechaza la hipótesis nula, existe evidencia de dependencia no lineal. Sin embargo, la prueba no indica la naturaleza del comportamiento de la serie, si es determinística o estocástica.

$$BDS = \frac{\sqrt{t} [C_{\varepsilon,m} - (C_{\varepsilon,1})^m]}{\sqrt{V_{\varepsilon,m}}} \quad (5)$$

### Prueba McLeod-Li

Brockwell y Davis (1996) y Gouriéroux (1997) proponen utilizar esta prueba, que se basa en la hipótesis nula de que las innovaciones siguen una distribución normal; en otras palabras, son i.i.d.

$$ML = n(n+2) \sum_{h=1}^m \frac{\hat{p}^2(h)}{n-h} \quad (6)$$

### Prueba Tsay

Este estadístico, propuesto por Tsay (1986), es una generalización de Keenan (1985). Específicamente, analiza la dependencia serial cuadrática de los datos. También es conocida como prueba F. La variable dependiente se ajusta por medio de un AR(p).

Si  $\hat{Y}_t^2$  y se descomponen en  $\hat{Y}_{t-i} \hat{Y}_{t-j}$ ,  $i, j = 1, \dots, M$ , donde M es la prueba Keenan. Por lo tanto, la prueba F sigue los siguientes pasos:

1. Se hace una regresión de  $Y_t$  sobre  $\{1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M}\}$  ajustando los valores  $\{\hat{Y}_t\}$  y los residuales  $\{\hat{\varepsilon}_t\}$  para toda  $t = M+1, \dots, n$ . El modelo es:

$$Y_t = W_t \Phi + \varepsilon_t$$

donde

$$W_t = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M}),$$

$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M)^T. \quad (7)$$

2. Se realiza la regresión de  $Z_t$  sobre  $\{1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M}\}$  y se calculan los residuales,  $\{\hat{X}_t\}$  para  $t=M+1, \dots, n$ . Así que la regresión multivariante es:

$$Z_t = W_t H + X_t, \text{ donde } Z_t \text{ es un } m = \frac{1}{2}M(M+1) \text{ vectores dimensionales}$$

$$\text{definidos por } Z_t^T = \text{vech}(U_t^T U_t), U_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M}).$$

3. El modelo ajustado es el siguiente:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{X}_t \beta + e_t, t = M+1, \dots, n. \quad (8)$$

## Prueba de bicovarianza de Hinich

Es un estadístico introducido por Hinich y Patterson (1985) que detecta en la serie momentos de tercer orden en el dominio del tiempo, utilizando la bicovarianza:

$$C_{xxx}(r, s) = (r-s)^{-1} \sum_{i=1}^{r-s} x(t_k) x(t_k+r) x(t_k+s), 0 \leq r \leq s \quad (9)$$

Definiendo  $G(r, s) = (r-s)^{-1} C_{xxx}(r, s)$  el estadístico tiene la siguiente forma:

$$H = \sum_{s=2}^l \sum_{r=1}^{s-1} G^2(r, s). \quad (10)$$

donde  $H$  es asintóticamente distribuido como  $\chi^2$  con  $l(l-1)/2$ ,  $l < N^{1/2}$ ,  $l = N^4$  bajo la hipótesis nula de que existen bico-varianzas no cero.

## Prueba biespectral de Hinich

Esta prueba es similar a la anterior. En Hinich (1996) se estudian los momentos de tercer orden a través de la bicovarianza, pero en este caso se analizan sobre el dominio de la frecuencia.

La función acumulada de momentos de tercer orden se define como:

$$C_{xxx}(r, s) = E[x(t_k)x(t_k + r)x(t_k + s)] \quad (11)$$

Si la doble transformada de Fourier de la función de momentos de tercer orden se define como el biespectrum, entonces el par de frecuencias del biespectrum es  $(f_1, f_2)$  la doble transformada de Fourier de  $C_{xxx}(r, s)$ :

$$B_x(f_1, f_2) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{xxx}(r, s) e^{-i2\pi(f_1 r + f_2 s)}. \quad (12)$$

Si se asume que  $|C_{xxx}(r, s)|$  es sumable. La simetría de  $C_{xxx}(r, s)$  se traslada dentro de la simetría de  $B_x(f_1, f_2)$ , es una función periódica donde su

dominio principal es triangular

$$\Omega = \left\{ 0 < f_1 < \frac{1}{2}, f_2 < f_1, 2f_1 + f_2 < 1 \right\}.$$

Entonces, el espectro de la serie es:

$$S_x(f) = \sigma_\varepsilon^2 |A(f)|^2,$$

$$\Psi^2(f_1, f_2) = \frac{|B_x(f_1, f_2)|^2}{S_x(f_1)S_x(f_2)S_x(f_1 + f_2)} = \frac{\mu_3^2}{\sigma_\varepsilon^6} \quad (13)$$

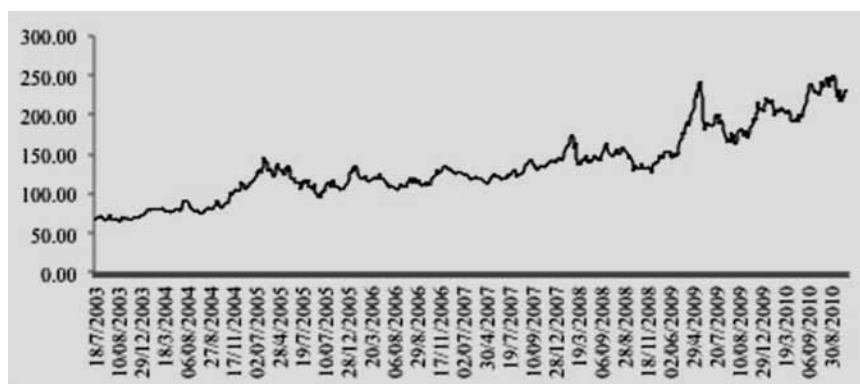
$$A(f) = \sum_{s=0}^{\infty} a(r) e^{-i2\pi f r}$$

La ecuación (13) define la función de asimetría. La hipótesis nula es que las innovaciones son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.).

## Datos

Los datos para este análisis corresponden al precio diario del café arábica colombiano para el periodo 18/07/2003-28/10/2010, con un total de 1,900 observaciones.<sup>1</sup> Los datos se transformaron en términos de la relación  $R_t = \ln(x_t - x_{t-1})$ , donde  $R_t$  es el rendimiento diario,  $x_t$  es el precio en el tiempo  $t$  y  $x_{t-1}$  es el precio un periodo previo.

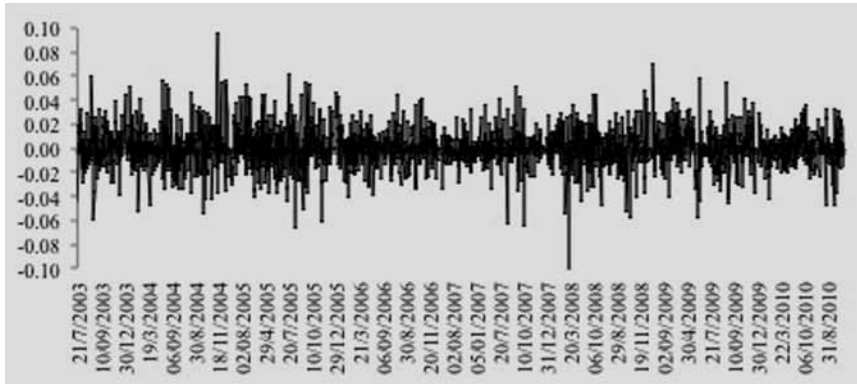
La gráfica 1 muestra el precio diario en términos reales. Se observa que existe una tendencia creciente en el precio. Aunque existen periodos de alta volatilidad en que los datos salen de su tendencia. Por ejemplo, alrededor del año 2005 hay un alza importante. Tres años después hay otra alza en 2008, y finalmente una en 2009 como la más alta. Sin embargo, también existen caídas importantes en 2005, a mediados y a finales de 2009, así como en varios periodos de 2010. Estas alzas y bajas pueden deberse al tipo de producto del que se trata, debido a que depende mucho de su oferta y demanda, así como del clima y de otros factores que no consideraremos, ya que el objetivo de este trabajo no es explicar el comportamiento del producto sino analizar las estructuras no lineales en este tipo de series tan volátiles.



**Gráfica 1.** Precio diario del café arábica tipo colombiano para el periodo 18/07/2003-28/10/2010.

<sup>1</sup> Se analiza esta serie simplemente para poder probar su estructura estadística. Los datos fueron obtenidos de Datastream.

La gráfica 2 muestra el rendimiento del índice en términos de logaritmo diario.



**Gráfica 2.** Rendimiento diario del café arábica tipo colombiano en logaritmos para el periodo 18/07/2003-28/10/2010.

En la tabla 1 se presenta el resumen estadístico de la serie. Se observa que la asimetría es positiva, lo cual indica que los valores tienden a reunirse más en la parte izquierda que en la derecha de la media. La curtosis indica que la distribución es leptocúrtica y no gaussiana. Para corroborar lo anterior se aplica el estadístico Jarque-Bera, el cual rechaza la hipótesis nula de normalidad.

<b>Tabla 1. Resumen estadístico para el rendimiento diario del café arábica tipo colombiano para el periodo 18/07/2003-28/10/2010</b>	
<b>Estadísticos descriptivos</b>	
Observaciones	1,899
Media	0.0006348
Desviación estándar	0.0175293
Asimetría	0.0045596
Curtosis	5.23
Jarque-Bera	393.4872

## Resultados

Antes de calcular los estadísticos no paramétricos se debe indagar si la serie es estacionaria, para ello la serie se diferenció una vez.<sup>2</sup> Posteriormente se ajustó la serie a un  $AR(p)$  para eliminar cualquier presencia no estacionaria. La selección del ajuste se basa en el criterio de Aikaike (AIC) y el bayesiano (BIC). El resultado es que la serie se ajusta a un  $AR(0)$  con un Aikaike de -6529.835 y un BIC de -6524.287.

Posteriormente aplicamos el estadístico Dicky-Fuller aumentado (DFA) bajo la hipótesis nula de que existe raíz unitaria, la cual se rechazó. Con lo anterior se tiene una serie estacionaria sin presencia de raíz unitaria. Enseguida se aplicó la prueba del multiplicador de Lagrange de Engle (Engle LM) para determinar si existía presencia de heteroscedasticidad, y si fuese así, buscaríamos elegir el modelo de la familia GARCH que mejor se ajustara a la serie.

Al aplicar la prueba del multiplicador hasta cuatro rezagos, bajo la hipótesis nula de que existen efectos ARCH, se rechazó la hipótesis nula. Por lo tanto, existe evidencia de que en la serie hay efectos heteroscedásticos.

Con lo anterior se realizaron todas las combinaciones posibles para la selección del mejor modelo entre el ARCH, GARCH, TGARCH y EGARCH y se escogió el modelo que mejor se adaptó a la serie de acuerdo con los criterios de AIC y BIC. Los resultados muestran que el modelo que mejor se adapta a la serie es el EGARCH (véase tabla 2).

Modelo	Ajuste	AIC	BIC
ARCH	(1,1)	-6526.980	-6510.336
GARCH	(1,1)	-6525.007	-6521.815
TGARCH	(1,1)	-6525.325	-6503.133
EGARCH	(1,1)	-6524.916	-6502.724

Estos resultados indican que la serie tiene efectos asimétricos y las innovaciones son no lineales en la varianza.

<sup>2</sup> Los cálculos se realizan por medio del programa STATA 11.

Una vez que llegamos a estas conclusiones, para probar que las innovaciones de la serie son i.i.d. se aplicaron los cinco estadísticos no paramétricos.<sup>3</sup>

Se analizaron los errores del modelo EGARCH(1,1) aplicándoles los estadísticos BDS; McLeo-Li, Tsay, bicovarianza Hinich y biespectrum Hinich. Todos ellos con hipótesis nula de que las innovaciones son i.i.d.

Siguiendo a Patterson y Ashley (2000), aplicamos las pruebas basadas en la teoría asintótica para muestras grandes e igualmente obtuvimos los resultados del *bootstrap* que se obtienen al aplicar los estadísticos a 1,000 nuevas réplicas muestrales independientes bajo la hipótesis nula de independencia serial.

En la tabla 3 se muestran los resultados para el McLeod-Li tanto para el análisis asintótico como para el *bootstrap* con distintos rezagos. Se rechaza la hipótesis de que las innovaciones son i.i.d.

**Tabla 3. Valores de  $p$  para la prueba McLeo-Li para distintos rezagos. Con un  $\alpha = 5\%$**

	Prueba McLeod-Li								
	Rezagos								
	1	2	3	4	8	12	16	20	24
Asintótico	0.014	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
<i>Bootstrap</i>	0.015	0.003	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000

Para el estadístico BDS, se rechaza igualmente la hipótesis nula de que las innovaciones son i.i.d. Esta prueba se aplicó para distintas dimensiones, desde 1 hasta 4, como valores de  $\epsilon$  (véase tabla 4). Se puede observar que no se rechaza la hipótesis nula a ningún valor de  $\epsilon$  en la dimensión 2, ni en lo asintótico ni en el *bootstrap*. Cuando aumenta la dimensión se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, no se puede concluir que exista una dependencia no lineal en las innovaciones. Bajo esta prueba, podríamos concluir que existe evidencia para decir que la serie se ajusta correctamente al modelo EGARCH.

<sup>3</sup> El cálculo de los distintos estadísticos se realiza con el *toolkit* proporcionado por Richard Ashley.

**Tabla 4. Valores de  $\rho$  para la prueba BDS con distintas dimensiones y valores de  $\epsilon$ . Con un  $\alpha = 5\%$**

	Prueba BDS					
	Épsilon					
	Asintótico			Bootstrap		
Dimensión	0.5	1	2	0.5	1	2
2	0.170	0.197	0.144	0.151	0.169	0.124
3	0.003	0.002	0.003	0.004	0.002	0.002
4	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000

Con respecto al estadístico Tsay, se puede concluir que la serie se puede ajustar a un modelo TGARCH, ya que no se rechaza la hipótesis nula. Aunque el TGARCH no fue el modelo seleccionado, estuvo entre los cuatro modelos propuestos y pudo haber sido elegido entre ellos (véase tabla 5).

**Tabla 5. Valores de  $\rho$  para el estadístico Tsay con un  $\alpha = 5\%$**

Estadístico Tsay	
Asintótico	0.126
Bootstrap	0.125

En los estadísticos bicovarianza y biespectral de Hinich se encontraron varias diferencias. Con el primer estadístico se rechaza la hipótesis, mientras que con el segundo no se puede rechazar. Hay que recordar que el primero es en el dominio del tiempo y el segundo en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto, no se puede asegurar con estos dos resultados que las innovaciones no sean i.i.d. Puede darse el caso de que las innovaciones sean i.i.d y no provenir de una distribución gaussiana, o viceversa (véase tabla 6).

**Tabla 6. Valores de  $p$  para el estadístico para las pruebas bicovarianza y biespectral con un  $\alpha = 5\%$**

Pruebas		
	Bicovarianza	Biespectral
Asintótico	0.011	0.130
<i>Bootstrap</i>	0.002	0.319

## Conclusiones

Se buscó, por medio de distintos modelos de la familia ARCH/GARCH, modelar la serie de rendimientos diarios del café arábica colombiano. Encontramos que el que mejor describía la serie fue un EGARCH(1,1). Una vez seleccionado el mejor modelo, se analizaron los errores bajos distintas pruebas no paramétricas a las innovaciones para conocer si existe dependencia no lineal. Algunos estadísticos rechazaron la hipótesis nula de i.i.d. Este fue el caso de los estadísticos McLeod-Li y bicovarianza de Hinich. Sin embargo, al aplicar la prueba BDS resultó que para una dimensión se rechazaba la distribución idéntica e independiente, lo cual indica que las innovaciones siguen una distribución normal.

Por otro lado, el estadístico Tsay no pudo rechazar la hipótesis nula. Esto sugiere que la serie podría ajustarse a modelos de tipo TGARCH, aunque inicialmente no fue el tipo de modelo que se seleccionó por los criterios de AIC. Sin embargo, de acuerdo con los resultados que presentamos en la tabla 2, el TGARCH presentó el segundo menor valor para el AIC. En el caso del estadístico biespectral tampoco se rechazó la hipótesis nula, utilizando momentos de tercer orden.

Lo anterior nos aporta mayores elementos para poder hacer un mejor ajuste de la serie y contar con mayor evidencia para una mejor comprensión del comportamiento de la serie. En este caso, los resultados nos indican que la serie puede modelarse ya sea por medio de un TGARCH o un EGARCH. Ya que estos no son los únicos modelos existentes, también podría compararse como un TAR, SETAR, redes neuronales y *wavelets*, entre otros.

En este caso los resultados no son concluyentes sobre la presencia de episodios de dependencia no lineal en la serie. Algunas pruebas proveen evidencia sobre comportamiento no lineal, por lo que es importante ser

cautelosos en el uso de modelos de la familia ARCH/GARCH en esta serie en particular. Sin embargo, también encontramos resultados que indican que es adecuado el uso de los modelos de la familia ARCH/GARCH. Si bien en este trabajo únicamente aplicamos cinco pruebas no paramétricas, no son las únicas, y habría que indagar más sobre las propiedades estadísticas de esta serie en particular. Aun así, este trabajo busca simplemente mostrar el empleo de estas cinco pruebas y el potencial de estadísticos no paramétricos en el estudio de las series, así como señalar la importancia que tiene este tipo de pruebas para una mejor aplicación de otro tipo de modelos, como los de la familia ARCH y GARCH.

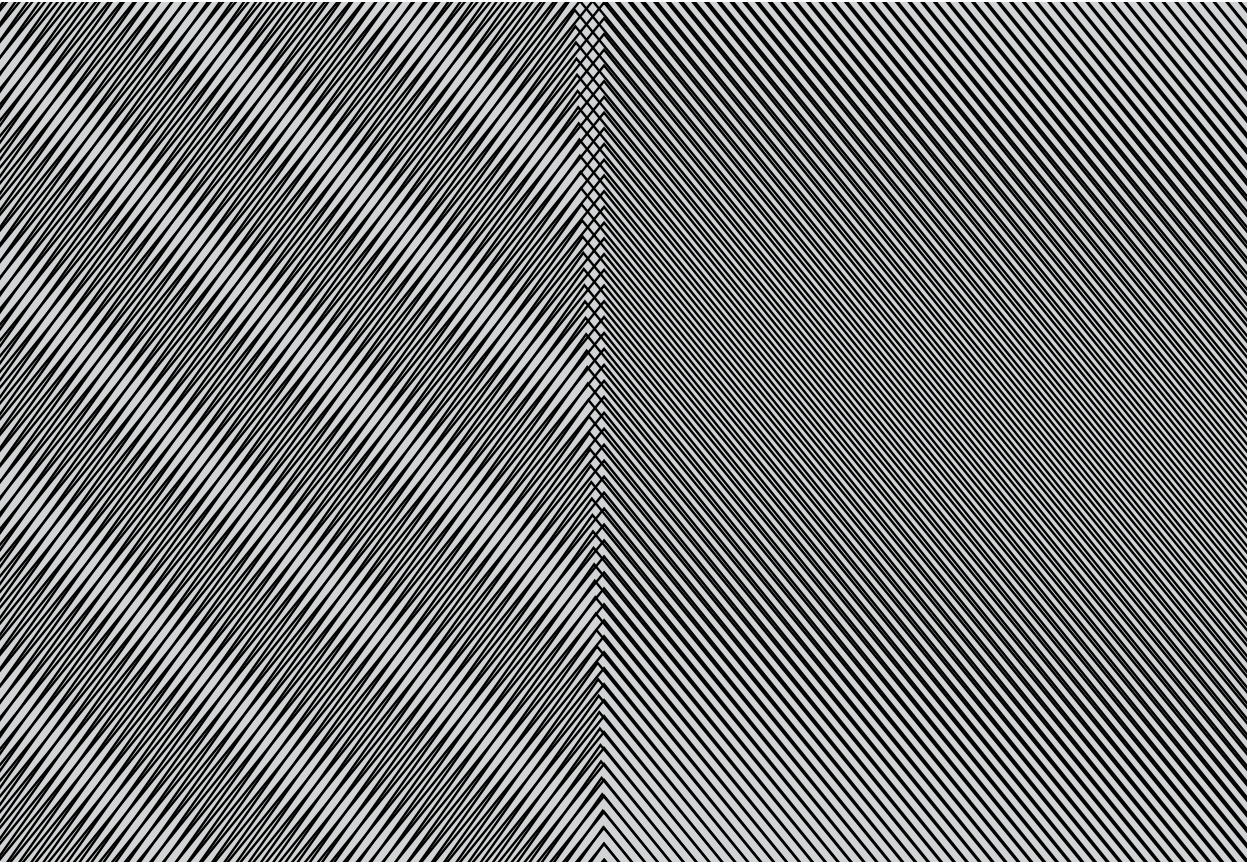
## Bibliografía

- Bak, P., Paczuski, M. y Shubik, M. (1997). Price variations in a stock market with many agents. *Physica A*, 246, (3-4), 430-453.
- Blank, S. (1991). "Chaos" in future markets? A nonlinear dynamical analysis. *The Journal of Futures Markets*, 11(6), 711-728.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
- Bouchaud, J. y Cont, A. (1998). A langevin approach to stock market fluctuations and crashes. *European Journal Physics B*, 6(4), 543-550.
- Brock, W., Dechert, W. y Scheinkman, J. (1996). A test for independence base on the correlation dimation. *Econometric Review*, 15, 197-235.
- Brockwell, P. y Davis, R. (1996). *ITSM for Windows*. New York: Springer.
- Brooks, C. (2002). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Chakraborti, A., Muni, I. Patriarca, M. y Abergel, F. (2011). Econophysics review: I. Empirical facts. *Quantitative Finance*, 11(7), 991-1012.
- De Arce, R. (2004). 20 años de modelos ARCH: una visión de conjunto de las distintas variantes de la familia. *Estudios de Economía Aplicada*, 22(1), 1-17.
- Decoster, G., Labys, W. y Mitchell, D. (1992). Evidence of chaos in commodity future prices. *Journal of Futures Markets*, 12(3), 291-305.
- Engel, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
- Gourierox, C. (1997). *ARCH models and financial applications*. New York: Springer.

- Granger, C. y Teräsvirta, T. (1993). *Modelling nonlinear economic relationships*. New York: Oxford University Press.
- Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9(1-2), 189-208.
- Hinich, M. (1996). Testing for dependence in the input to a linear time series. *Journal of Nonparametric Statistics*, 6, 205-221.
- Hinich, M. y Patterson, D. (1985). Evidence of nonlinearity in daily stock returns. *Journal of Business and Economic*, 31(1), 69-77.
- Keenan, D. (1985). A turkey non-additivity type test for time series nonlinearity. *Biometrika*, 72, 39-44.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroscedasticity in asset return: A new approach. *Econometrica*, 59, 347-370.
- Patterson, D. y Ashley, R. (2000). *A nonlinear time series workshop: A toolkit for detecting and identifying nonlinear time series dependence*. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.
- Tong, H. (1990). *Non-linear time series: A dynamical system approach*. UK: Oxford University Press.
- Tsay, R. (1986). Nonlinearity test for time series. *Biometrika*, 73(2), 461-466.
- Tsay, R. (2005). *Analysis of financial time series*. New Jersey: Wiley-Interscience.
- Zakoian, J. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5), 931-955.

Abigail Rodríguez Nava  
Departamento de Producción Económica, Universidad Autónoma  
Metropolitana Unidad Xochimilco  
Francisco Venegas Martínez  
Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional

# Procesos estocásticos y simulación Monte Carlo: aplicación para el tipo de cambio



## Introducción

En la actualidad, una de las mayores necesidades en economía y finanzas es la construcción de modelos explicativos que describan la forma en que han evolucionado las variables objetivo y las relaciones entre éstas. El conocimiento del proceso que rige la dinámica de las distintas variables tiene importancia tanto en los análisis retrospectivos como en la formulación de escenarios prospectivos.

Entre las alternativas de simulación destaca el método Monte Carlo. Este enfoque parte de la suposición de que la variable que se desea modelar tiene una dinámica específica que se describe de acuerdo con algún proceso estocástico, en el cual los términos de error son variables aleatorias con una distribución de probabilidad específica. En el método Monte Carlo se generan series de números aleatorios con la distribución requerida y se incorporan a la ecuación del proceso estocástico. Cada trayectoria simulada proporciona una posible evolución de la variable partiendo de un periodo inicial y continuando con el número de periodos elegido, el valor del proceso en cada instante se obtiene recursivamente, es decir, tomando como base el valor del proceso obtenido en el periodo anterior.

La simulación Monte Carlo se ha dirigido principalmente al estudio de la evolución de precios o de su variación, así como a la descripción del rendimiento de títulos financieros. Básicamente se distinguen dos áreas de investigación: el análisis de los procesos estocásticos más idóneos para describir la dinámica de la variable de interés y la revisión de los procedimientos técnicos que mejoren los resultados. Con respecto al primero, algunos ejemplos son: la aplicación sobre la dinámica de tasas de interés en México y Estados Unidos realizada en Márquez *et al.* (2003) a través del modelo Nelson-Siegel; el análisis del rendimiento de los bonos del Tesoro estadounidense en Johannes (2004); la simulación de precios de bonos del gobierno mexicano en Cruz (2006); la evaluación de la trayectoria del tipo de cambio (del dólar frente a

otras monedas) como una caminata aleatoria y mediante simulación Monte Carlo en Hakkio (1986); el análisis de la dinámica del rendimiento del índice accionario Standard & Poor's 500 en Huang (2004); el modelado del precio de opciones financieras de tipo europeo en Boyle (1998), y el precio de opciones exóticas sobre tasas de interés en Clewlow y Stickland (1998).

Entre los trabajos que han explorado las alternativas para la generación de números aleatorios se encuentran Joy *et al.* (1996), Boyle *et al.* (1998), Douady (1998), Dupire y Savine (1998) y Seydel (2009). Y entre las investigaciones referentes a los procedimientos de discretización de procesos estocásticos se encuentran Renshaw (1987), Chan *et al.* (1992), Clew y Manfredi (1999), Yu y Phillips (2001), Hsiao y Semmler (2002), Alfonsi (2005), Platen y Bruti (2010), Platen y Heath (2010) y Cosella y Roberts (2011).

El propósito de este trabajo consiste en examinar los diferentes métodos para discretizar las ecuaciones diferenciales estocásticas asociadas a procesos en el tiempo continuo de uso más común y llevar a cabo la simulación Monte Carlo. Para ello se examinan el método de Euler, el método de Milstein y el método exacto; en los tres casos los procedimientos se aplican a la simulación de la variación del tipo de cambio a través del movimiento geométrico browniano y el proceso Ornstein-Uhlenbeck. Finalmente, se estiman los errores en la simulación provenientes de la discretización.

## Propiedades de procesos estocásticos

A partir de la descripción del movimiento de partículas de polen suspendidas en un líquido, realizada por Brown (1829), investigadores notables como Bachelier (1900), Einstein (1905) y Wiener (1942), entre otros, contribuyeron a la definición matemática del movimiento geométrico browniano; Bachelier lo asoció con las variaciones del precio de activos financieros, Einstein con el movimiento de partículas de gas para estudiar sus propiedades electrodinámicas y Wiener con una axiomática del movimiento browniano.

El movimiento browniano estándar  $W = \{W_t: t \geq 0\}$  tiene las siguientes propiedades: 1)  $W_0 = 0$ ; 2) para el conjunto  $t_0 = 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , los incrementos  $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  son estacionarios e independientes; 3) dado  $0 \leq s < t$ ,  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ . Alternativamente, el movimiento browniano con tendencia:

$$X_t = \mu t + \sigma W_t \quad (1)$$

tiene las propiedades: 1)  $X_0 = 0$ ; 2) para el conjunto  $t_0 = 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , los incrementos  $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son estacionarios e independientes; 3) dado  $0 \leq s < t$ , entonces  $X_t - X_s \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$ .

El movimiento browniano (estándar y con tendencia) es la base de otros procesos estocásticos, pero se utiliza poco en la modelación de precios porque supone (de acuerdo con las propiedades señaladas) que su trayectoria inicialmente tiene el valor de cero (y puede tomar valores negativos); además, difícilmente los incrementos en los precios tienen medias cero y varianzas proporcionales al tiempo.

El movimiento geométrico browniano se representa como:

$$S_t = S_0 e^{X_t}, X_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t. \quad (2)$$

La ecuación (2) es solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (3)$$

Al utilizar el lema de Itô en (3) y como proceso subyacente  $f = \ln S_t$ , se obtiene:

$$d(\ln S_t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t,$$

$$d(\ln S_t) = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt.$$

Las principales propiedades del movimiento geométrico browniano son: 1)  $\{W_t: t \geq 0\}$  es un movimiento browniano; 2)  $S_t \sim \text{lognormal}(S_0 e^{\mu(t-s)}, e^{2\mu(t-s)} S_0^2 (e^{\sigma^2(t-s)} - 1))$ ,  $0 \leq s < t$ ; 3) los parámetros de tendencia  $\mu$  y volatilidad  $\sigma$  varían en el tiempo proporcionalmente con  $S_t$  (si  $t \rightarrow \infty$  entonces la media y la volatilidad se incrementan sin límite). La ecuación del movimiento geométrico browniano fue propuesta por Samuelson (1957) para modelar el precio de activos financieros, y la utilizaron Black y Scholes (1973) para determinar el precio de una opción europea y Merton (1973) para obtener también

el precio de una opción europea y el precio a descuento de un bono cupón cero.

Otra versión del movimiento geométrico browniano, ahora con reversión a la media, fue sugerida por los físicos Uhlenbeck y Ornstein (1930), quienes representaron el movimiento cinético de los gases a través de la ecuación:

$$dm_t = -am_t + a\sigma dZ_t, dZ_t \sim N(0, dt) \quad (4)$$

donde  $m_t$  representa una molécula de gas y  $a$  y  $\sigma$  son constantes positivas. En (4), el término de tendencia  $-am_t$  puede adquirir valores positivos o negativos y siempre fluctuando en torno al cero de acuerdo con el valor de  $m_t$ . Cuando el primer término es cero, la molécula de gas continúa presentando un movimiento aleatorio.

Más adelante, el proceso Ornstein-Uhlenbeck fue utilizado por Vasicek (1977) para representar la dinámica de la tasa de interés. Al utilizar el cambio de variable  $m_t = ar_t - ab$  en (4), ésta se reescribe así:

$$d(ar_t - ab) = -a(ar_t - ab)dt + a\sigma dZ_t, dZ_t \sim N(0, dt)$$

$$dr_t = -(ar_t - ab)dt + \sigma dZ_t, dZ_t \sim N(0, dt)$$

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dZ_t, a, b > 0, dZ_t \sim N(0, dt) \quad (5)$$

Al proceso (5) se le conoce también como movimiento geométrico browniano con reversión a la media, y tiene las siguientes propiedades: 1)  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$  son constantes positivas, la tasa de interés  $r_t$  fluctúa, a lo largo del tiempo, en torno a la media de largo plazo  $b$ ; si  $r_t > b$ , entonces la tasa de interés es forzada a disminuir, y cuando  $r_t < b$ , la tasa de interés tiende a aumentar; la velocidad de ajuste está determinada por  $a$ ; 2)

$$r_t \sim N\left(b + ((r_0 - b)e^{-a(t-s)}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})\right), \text{ dado } 0 \leq s < t,$$

por lo que  $r_t$  puede tomar valores negativos; 3) si  $t \rightarrow \infty$  entonces la media converge al parámetro  $b$  y la volatilidad a  $\sigma^2/2a$ .

## Simulación Monte Carlo

El método Monte Carlo para la simulación de procesos estocásticos consta de las siguientes fases:

1. Se generan  $n$  series de números aleatorios cuya distribución de probabilidad está asociada al parámetro de incertidumbre del proceso estocástico. Generalmente —y para los procesos descritos en la sección anterior—, los números aleatorios generados tienen distribución uniforme, éstos se transforman en números aleatorios con distribución normal utilizando el método Box-Muller:

$$a_1 = \sqrt{-2\ln U_1} \cos(2\pi U_2), a_2 = \sqrt{-2\ln U_1} \sin(2\pi U_2) \quad (6)$$

donde  $U_1$  y  $U_2$  son variables aleatorias uniformes y  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son variables aleatorias normales.

2. Cada serie de números aleatorios proporciona una trayectoria del proceso estocástico, para incluir el componente aleatorio en el resto del proceso; éste debe representarse en forma discreta siguiendo el método de Euler, el de Milstein o el exacto.
3. Se generan  $n$  trayectorias del proceso estocástico en forma recursiva y se obtiene el promedio de éstas.

### Simulación del tipo de cambio mediante el movimiento geométrico browniano (MGB)

La trayectoria que se desea simular es la variación del tipo de cambio peso-dólar, no su magnitud; esto se realiza considerando:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (7)$$

Platen y Wagner (1982) desarrollaron una metodología para construir aproximaciones numéricas de ecuaciones diferenciales estocásticas, a partir de expansiones de Taylor. En el caso general:

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + a(X_{t_n}) \Delta + b(X_{t_n}) I_{(1)} + b(X_{t_n}) b'(X_{t_n}) I_{(1,1)} + R_{t_0,t}, \quad (8)$$

$$I_{(1)} = \Delta W_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} dW_s,$$

$$I_{(1,1)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1} dW_{s_2} = \frac{1}{2}((I_{(1)})^2 - \Delta),$$

$$I_{(0,1)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} ds_1 dW_{s_2},$$

$$I_{(1,0)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1} ds_2,$$

$$I_{(1,1,1)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_3} \int_{\tau_n}^{\tau_2} dW_{s_1} dW_{s_2} dW_{s_3},$$

donde  $R_{t_0,t}$  representa el elemento restante de mayor orden (Platen, 2008: 504). A partir de (8), las alternativas para discretizar la ecuación (7) son:

*Método de Euler.* Este método es el más sencillo, la simulación deseada de  $St$  ocurre en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ , que en términos discretos es  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ , se asume que todos los incrementos  $t_n - t_{n-1}$  están igualmente espaciados. Los incrementos se evalúan considerando los cambios entre  $t$  y  $t + dt$ , es decir,

$$S_{t+dt} = S_t + \int_t^{t+dt} \mu(S_u, u) du + \int_t^{t+dt} \sigma(S_u, u) dW_u, \quad (9)$$

$$S_{t+dt} = S_t + \mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) d(W_{t+dt} - W_t),$$

$$S_{t+dt} = S_t + \mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) \sqrt{dt} Z_t, Z_t \sim N(0, 1)$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu(S_t, t) \Delta t + \sigma(S_t, t) \sqrt{\Delta t} Z_t, Z_t \sim N(0, 1)$$

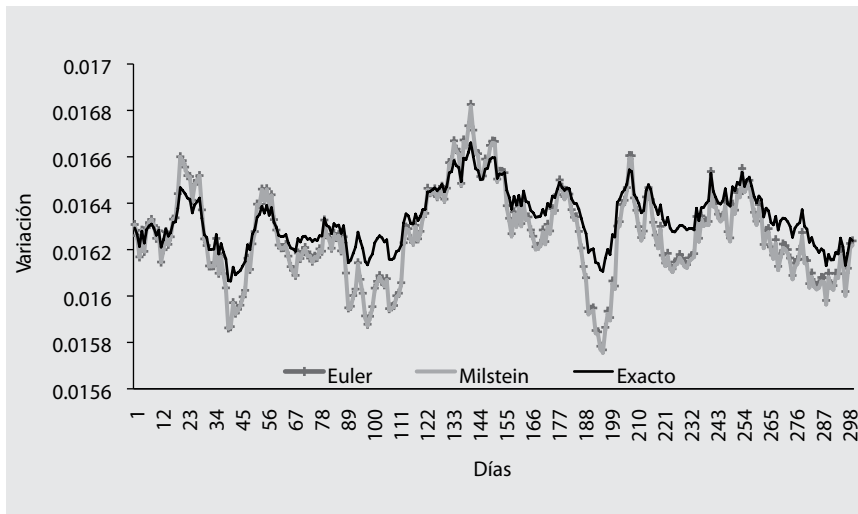
Claramente, (9) se construye utilizando los tres primeros términos de la ecuación (8).

*Método de Milstein.* Este método utiliza los cuatro primeros términos de la ecuación (8), que para el MGB conduce a:<sup>1</sup>

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu(S_t, t)\Delta t + \sigma(S_t, t)\sqrt{\Delta t}Z_t + \frac{1}{2}\sigma\Delta t(Z_t^2 - 1), Z_t \sim N(0, 1) \quad (10)$$

*Método exacto.* La discretización utilizada bajo este método emplea la media y la varianza del proceso; por lo tanto, la simulación del MGB se basa en (Brigo *et al.*, 2007):

$$S_{t+dt} = S_t e^{\mu\Delta t} + S_t^2 e^{2\mu\Delta t + e^{\sigma^2\Delta t}} Z_t, Z_t \sim N(0, 1) \quad (11)$$



**Gráfica 1.** Simulación Monte Carlo de la variación del tipo de cambio peso-dólar estado-unidense a partir del MGB. Comparación entre los métodos de Euler, Milstein y exacto.

La simulación Monte Carlo para la variación del tipo de cambio (aquí  $S_t$ ) mediante el MGB y a partir de las ecuaciones (9), (10) y (11) se basó en los datos diarios observados entre enero de 2006 y septiembre de 2011 publicados por el Banco de México; la variación del tipo de cambio en este periodo tiene una media de 0.01627312 y una varianza de 0.54016329. En la gráfica 1 se muestran los resultados de la simulación utilizando los métodos de discretización señalados.

<sup>1</sup> La deducción de la ecuación (10) puede consultarse en Douglas (2011) y Platen (2010).

## Simulación del tipo de cambio mediante el proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU)

La ecuación que se desea simular es la variación del tipo de cambio  $S_t$ :

$$dS_t = a(b - S_t)dt + \sigma dZ_t, a, b > 0, dZ_t \sim N(0, dt) \quad (12)$$

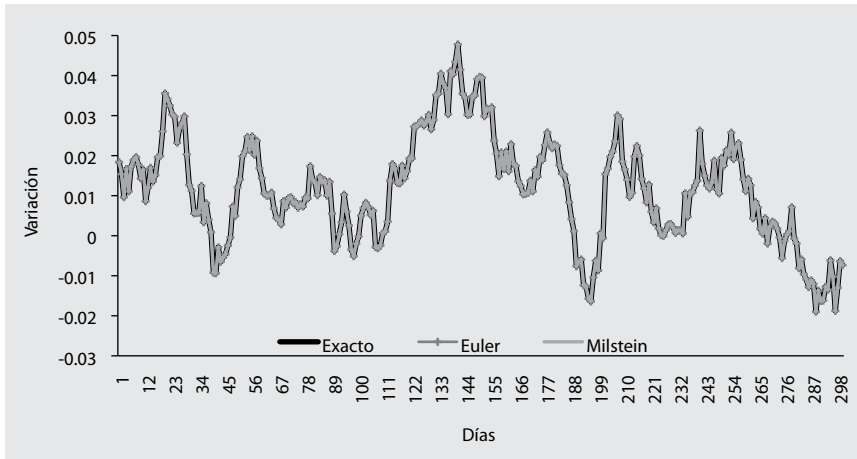
La discretización correspondiente bajo los métodos de Euler y Milstein es idéntica:

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta t} &= S_t + a(b - S_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t, Z_t \sim N(0, 1) \\ S_{t+\Delta t} &= ab + (1 - a)S_t\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t, Z_t \sim N(0, 1) \end{aligned} \quad (13)$$

La ecuación correspondiente al método exacto es:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{-a\Delta t} + b(1 - e^{-a\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})}Z_t, Z_t \sim N(0, 1) \quad (14)$$

La definición de los parámetros  $a, b$  de las ecuaciones anteriores requiere una estimación de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) a partir de las variaciones observadas del tipo de cambio. La propuesta es utilizar los estimadores  $\hat{\beta}_0 = ab, \hat{\beta}_1 = (1 - a)$ , y por lo tanto,  $\hat{a} = 1 - \hat{\beta}_1, \hat{b} = \hat{\beta}_0 / \hat{a}$  (Vengas, 2008); en nuestro caso se obtuvo que  $a = 0.97748044, b = 0.01657312$ . Los resultados de la simulación con las tres alternativas de discretización se muestran en la gráfica 2, donde destaca la convergencia de los tres métodos, a diferencia de lo que ocurre con la simulación del MGB.



**Gráfica 2.** Simulación Monte Carlo de la variación del tipo de cambio peso-dólar estadounidense a partir del proceso Ornstein-Uhlenbeck. Comparación entre los métodos de Euler, Milstein y exacto.

## Errores de discretización

Los errores en la simulación resultantes del procedimiento de discretización dependen tanto del número de periodos simulados como de los incrementos de tiempo elegidos. El procedimiento de cálculo de los errores se deriva de los criterios de convergencia para la simulación de escenarios o de funciones, éstos son (Platen, 2008):

1. La convergencia en sentido estricto de orden  $\gamma \in (0, \infty)$ , de la aproximación discreta  $Y$  a la solución exacta  $X$  de una ecuación diferencial estocástica, cuando existe una contante  $K < \infty$ , se define como:

$$E | X_T - Y_N | \leq K \Delta^\gamma, \forall \Delta t \in (0, 1) \quad (15)$$

2. La convergencia en sentido débil de orden  $\gamma \in (0, \infty]$  de la aproximación discreta  $Y$  a la solución exacta  $X$  de una ecuación diferencial estocástica, si para cualquier polinomio  $g$  existe una constante  $K_g < \infty$  se define como:

$$| E(g(X_T)) - E(g(Y_N)) | \leq K_g \Delta^\gamma, \forall \Delta t \in (0, 1) \quad (16)$$

En Platen (2008) y Platen y Bruti (2010) se muestra que la convergencia en sentido estricto es una medida apropiada cuando se desea evaluar la simulación de la trayectoria de alguna variable. Para medir el error de las simulaciones Monte Carlo, respecto al resultado exacto, se calcularon los siguientes indicadores (Cziraky y Kucherenko, 2011):

1. Error promedio absoluto:

$$EPA = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |X_t - Y_t|. \quad (17)$$

2. Raíz del error cuadrado medio:

$$EPA = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - Y_t)^2} \quad (18)$$

donde  $X_t$  es el resultado de la simulación exacta y  $Y_t$  es la aproximación discreta. A partir de (17) y (18) se observa que entre mayor sea el número de periodos incluidos en la simulación, son menos los errores. Los resultados de la estimación de los errores se muestran en la tabla 1, se obtuvieron considerando 300 periodos; obsérvese que cuando el incremento del tiempo es más reducido (es decir, en el caso en que  $Dt=1/360$ ), la simulación es más cercana a la solución exacta.

En el caso de la simulación del tipo de cambio, los mejores resultados (los errores menores) se obtienen cuando se utiliza el proceso Ornstein-Uhlenbeck y cualquiera de las discretizaciones, Euler o Milstein. Nótese que aun cuando el proceso OU es poco utilizado por la posibilidad de que la variable modelada asuma valores negativos, en este caso su uso sí es adecuado ya que se modela la variación —positiva o negativa— del tipo de cambio y no su magnitud.

<b>Tabla 1. Errores de discretización de la simulación Monte Carlo</b>		
<b>Criterio 1. Error promedio absoluto (EPA)</b>		
	<b>Dt = 0.01</b>	<b>Dt = 1/360</b>
MGB Euler	0.000297451	0.000090704
MGB Milstein	0.000288305	0.000097831
OU Euler	0.122244619	0.000014628
OU Milstein	0.122244619	0.000014628
<b>Criterio 2. Raíz del error cuadrado medio (RECM)</b>		
	<b>Dt = 0.01</b>	<b>Dt = 1/360</b>
MGB Euler	0.000338416	0.000112557
MGB Milstein	0.000362058	0.000119687
OU Euler	0.153150745	0.000018319
OU Milstein	0.153150745	0.000018319

## Conclusiones

Existen en la literatura especializada diferentes métodos alternativos para transformar procesos estocásticos de tipo continuo en sus versiones discretas. El desempeño de las versiones discretas puede ser evaluado mediante ejercicios de simulación de posibles trayectorias con el método Monte Carlo.

Esta investigación se concentró en los esquemas de discretización planteados por Euler y Milstein, así como en el método exacto. Se puso atención especial en el movimiento geométrico browniano y los procesos con reversión a la media, del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Estos procesos son muy útiles en física en el estudio del comportamiento de moléculas de gases, y en matemáticas financieras y en teoría económica para modelar la dinámica estocástica de diversas variables económicas y financieras relevantes.

Las propiedades de cada uno de los métodos de discretización propuestos fueron examinadas a partir de su aplicación en la simulación de las posibles trayectorias, con el método Monte Carlo, del tipo de cambio peso-dólar. Por supuesto, queda pendiente aplicar y evaluar el desempeño de los métodos propuestos de discretizar en otras ecuaciones diferenciales estocásticas de uso común; como el modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) y otros.

## Bibliografía

- Alfonsi, A. (2005). On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods and Applications*, 11(4), 355-384.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e. série, 21-86.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Boyle, P. P. (1998). Options: A Monte Carlo approach. En Bruno Dupire (ed.), *Monte Carlo, methodologies and applications for pricing and risk management*. UK: Risk Books.
- Boyle, P. P., Broadie, M. y Glasserman, P. (1998). Monte Carlo methods for security pricing. En Bruno Dupire (ed.), *Monte Carlo, methodologies and applications for pricing and risk management*. UK: Risk Books.
- Brigo, D., Dalessandro, A., Neugebauer, M. y Triki, F. (2008). A stochastic processes toolkit for risk management. *Journal of Risk Management for Financial Institutions*, 2(4), 365-393.
- Casella, B. y Gareth, R. (2011). Exact simulation of jump-diffusion processes with Monte Carlo applications. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 13(3), 449-473.
- Chan, K. C., Karolyi, A. Longstaff, A. y Sanders, A. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *The Journal of Finance*, 47(3), 1209-1227.
- Cleur, E. y Manfredi, P. (1999). One dimensional SDE models, low order numerical methods and simulation based estimation: A comparison of alternative estimators. *Computational Economics*, 13(2), 177-197.
- Clewlow, L. y Strickland, C. (1998). Pricing interest rate exotics by Monte Carlo simulation. En Bruno Dupire (ed.), *Monte Carlo, methodologies and applications for pricing and risk management*. UK: Risk Books.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. y Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 53(2), 385-407.
- Cruz, F. (2006). Valuación del valor en riesgo de bonos cupón cero en el mercado financiero mexicano a través del modelo de Vasicek, CIR, y simulación Monte Carlo con saltos de Poisson. *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, 5(1), 47-83.
- Cziraky, D. (2011). *Monte Carlo forecasting from CIR square root diffusion models*.

- Documento de trabajo, British-Russian Offshore Development Agency. Recuperado de [http://www.broda.co.uk/gsa/CIR\\_model\\_S\\_Plus.pdf](http://www.broda.co.uk/gsa/CIR_model_S_Plus.pdf).
- Douady, R. (1998). Model calibration in the Monte Carlo framework. En Bruno Dupire (ed.), *Monte Carlo, methodologies and applications for pricing and risk management*. UK: Risk Books.
- Dupire, B. y Savine, A. (1998). Dimension reduction and other ways of speeding Monte Carlo simulation. En Bruno Dupire (ed.), *Monte Carlo, methodologies and applications for pricing and risk management*. UK: Risk Books.
- Hakkio, C. S. (1986). Does the exchange rate follow a random walk? A Monte Carlo study of four tests for a random walk. *Journal of International Money and Finance*, 5(2), 221-229.
- Hsiao, C. y Semmler, W. (2002). *Modeling short term interest rates*. Documento de trabajo No. 39, Center for Empirical Macroeconomics, University of Bielefeld, Germany.
- Huang, X. (2004). *The behavior of jump statistics*. Documento de trabajo, Duke University.
- Johannes, M. (2004). The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models. *The Journal of Finance*, 59(1), 227-260.
- Joy, C., Boyle, P. P. y Tan, K. S. (1996). Quasi-Monte Carlo methods in numerical finance. *Management Science*, 42(6), 926-938.
- Márquez, J., Noguez, E. C. y Vélez, V. (2003). *Un método eficiente para la simulación de curvas de tasas de interés*. Documento de trabajo, Banco de México.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.
- Platen, E. (2008). Simulation methods for stochastic differential equations. *Handbook of information technology in finance*. Berlin: Springer, 501-514.
- Platen, E. y Heath, D. (2010). *A benchmark approach to quantitative finance*. Berlin: Springer.
- Platen, E. y Bruti, N. (2010). *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance, stochastic modelling and applied probability*. Berlin: Springer.
- Renshaw, E. (1987). The discrete Uhlenbeck-Ornstein process. *Journal of Applied Probability*, 24(4), 908-917.
- Rouah, F. (2011). *Euler and Milstein discretization*. Documento de trabajo, Sapient Global Markets, Estados Unidos. Recuperado de [www.frouah.com](http://www.frouah.com).
- Samuelson, P. (1965). Rational theory of warrant prices. *Industrial Management Review*, 16(6), 13-39.

- Seydel, R. (2009). *Generating random numbers with specific distributions, tools for computational finance*. Berlin: Springer Heidelberg.
- Uhlenbeck, G. E. y Ornstein, L. S. (1930). On the theory of Brownian motion. *Physical Review*, 36(5), 823-841.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188.
- Venegas, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos*. México: Cengage Learning.
- Wiener, N. (1942). *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. Estados Unidos: MIT Press.
- Yu, J. y Phillips, P. (2001). A Gaussian approach for continuous time models of the short term interest rate. *The Econometrics Journal*, 4(2), 210-224.

